

Caracterización de errores en circuitos cuánticos: índice de isotropía para estados de n-qubits



A. FONSECA DE OLIVEIRA, E. BUKSMAN - *Fac. de Ingeniería, Universidad ORT Uruguay*

J. GARCÍA-LÓPEZ, F. GARCÍA MAZARÍO - *ETSISI, Universidad Politécnica de Madrid*

fonseca@ort.edu.uy



XXXV REUNIÓN BIENAL DE LA REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA DE FÍSICA, 13-17 Julio 2015, Gijón, España.

ERRORES ISÓTROPAS

Sea un estado puro de referencia ψ_0 definido en un sistema cuántico de n -qubits. Un error de decoherencia es isótropo y temporalmente independiente, respecto a ψ_0 , si la probabilidad de ir a un estado ψ depende solamente de la distancia entre ψ y ψ_0 [1]. Sin perder generalidad, si se considera el estado de referencia como $\psi_0 = |0\rangle$, el error isótropo puede ser representado como un estado aleatorio

$$\psi = a_0|0\rangle + a_1e^{i\varphi_1}|1\rangle + \dots + a_{2^n-1}e^{i\varphi_{2^n-1}}|2^n - 1\rangle \quad (1)$$

siendo

- $|i\rangle$ los vectores de la base,
- φ_i variables aleatorias con distribución uniforme en el intervalo $[0, 2\pi)$,
- a_i variables aleatorias con la misma distribución para $1 \leq i \leq 2^n - 1$ y que cumplen con el vínculo $\sum_{i=0}^{2^n-1} |a_i|^2 = 1$.

La matriz de densidad (esperanza) de la variable aleatoria $|\psi\rangle\langle\psi|$ tiene la forma

$$\rho = E(|\psi\rangle\langle\psi|) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{cases} (\lambda_1 2^n) \frac{I}{2^n} + (\lambda_0 - \lambda_1) \rho_0, & \lambda_0 \geq \lambda_1 \\ (\lambda_0 2^n) \frac{I}{2^n} + (\lambda_1 - \lambda_0) (I - \rho_0), & \lambda_0 < \lambda_1. \end{cases} \quad (2)$$

EJEMPLO: CÓDIGO CORRECTOR

En este ejemplo se analiza la distorsión de información en un canal cuántico utilizando un código corrector de 5 qubits [2-3]. Los errores son aplicados a la palabra de código y son del tipo *Depolarizing Channel*, *BitFlip* y *PhaseFlip* en cada qubit del canal, y del tipo *Depolarizing Channel* en el estado completo (5 qubits) [4].

Las figuras a continuación ilustran la variación del índice de isotropía en función de la probabilidad (pn) de aplicación de cada tipo de error. En la figura 1 se observa la variación en la palabra de código con error, mientras en la figura 2 se ilustra la variación en el qubit lógico corregido y decodificado. Las curvas corresponden a: *Depolarizing Channel* en el estado completo (negra), *Depolarizing Channel* por qubit (azul), *BitFlip* (verde) y *PhaseFlip* (roja).

En las figuras 1(C) y 2(C) es posible observar las variaciones utilizando el diagrama del triángulo de isotropía.

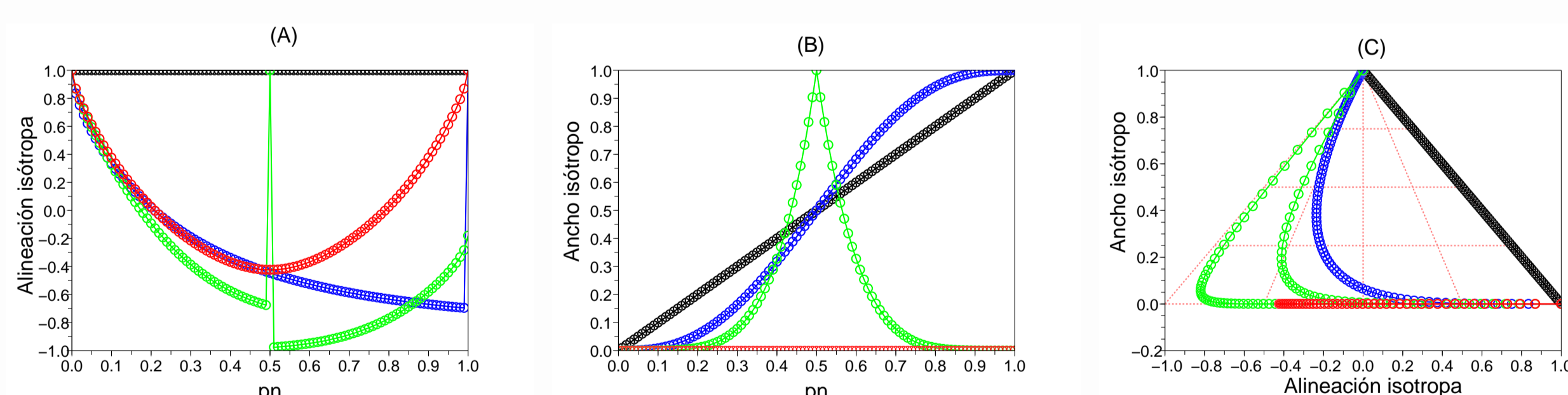


Fig.1: Variación del índice de isotropía en la palabra de código según el tipo de error.

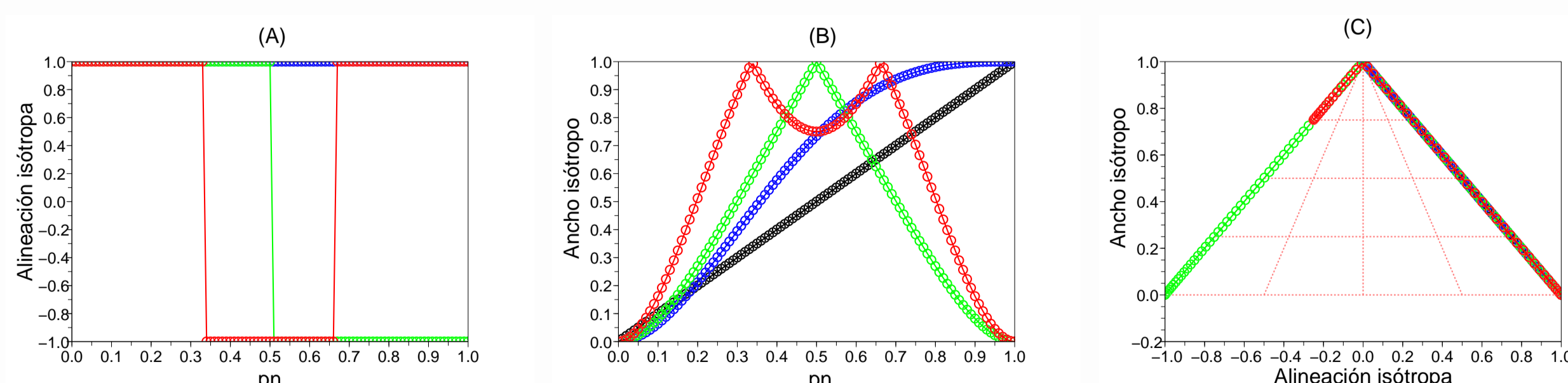


Fig.2: Variación del índice de isotropía en el qubit lógico según el tipo de error.

ÍNDICE DE ISOTROPÍA

Sea ρ la matriz de densidad que representa el error de un circuito cuántico considerando el estado de referencia $\rho_0 = |0\rangle\langle 0|$ (en caso de otro estado de referencia se realiza un cambio de base), M la matriz de cambio de base que lleva ρ a su forma diagonal $\rho_d = M^\dagger \rho M$ y $\lambda = \min(\lambda_i)$, donde λ_i son los valores propios de ρ . Luego ρ_d se puede descomponer en la forma

$$\rho_d = \lambda I + \Theta = (2^n \lambda) \frac{I}{2^n} + \text{Tr}(\Theta) \hat{\rho}_d = p \frac{I}{2^n} + (1 - p) \hat{\rho}_d. \quad (3)$$

Si se realiza el cambio de base inverso, ρ tiene la forma

$$\rho = p \frac{I}{2^n} + (1 - p) \hat{\rho}. \quad (4)$$

Definición (Índice de Isotropía). Se define el (doble) índice de isotropía para un estado cuántico ρ , considerando como estado de referencia el estado ρ_0 al par

$$Iso(\rho) \triangleq (A, p) \quad (5)$$

siendo

- A , la *Alineación Isótropa*, definida como

$$A = \text{Fid}(\hat{\rho}, \rho_0) - \text{Fid}(\hat{\rho}, \rho_{i0}) \quad (6)$$

donde *Fid* es la *fidelidad* entre estados cuánticos y ρ_{i0} es la mezcla isótropa ortogonal a ρ_0 (con el producto interno usual de matrices),

$$\rho_{i0} = \frac{I - \rho_0}{2^n - 1}, \quad (7)$$

- y $p = 2^n \lambda$, el *Ancho Isótropo*, siendo λ el menor autovalor de ρ .

Un estado ρ representa un error isótropo cuando $A = \pm 1$ ($\forall p$), o $p = 1$.

EJEMPLO: ALGORITMO DE GROVER

El algoritmo de Grover es un algoritmo cuántico de búsqueda [5-6] que resuelve el problema de hallar un elemento marcado en un conjunto desordenado de N elementos utilizando $O(\sqrt{N})$ veces un oráculo. El conjunto de elementos está representado por los $N = 2^n$ estados de la base ortonormal del espacio generado por un sistema de n -qubits. En este ejemplo se analiza el efecto de un error del tipo *Depolarizing Channel* en el estado completo en cada paso de la iteración ($n = 8$ qubits).

Si se considera como referencia el elemento marcado $\rho_0 = |t\rangle\langle t|$ (*target*), es posible interpretar el funcionamiento del algoritmo como la corrección de un estado original con error, que es gradualmente corregido.

Las figuras a continuación ilustran la variación del índice de isotropía según el paso k del algoritmo, para diferentes probabilidades pn de aplicación del error: 0 (sin error, negro), 0.025 (azul), 0.05 (verde claro), 0.1 (celeste), 0.15 (rojo), 0.2 (magenta) y 0.5 (verde oscuro).

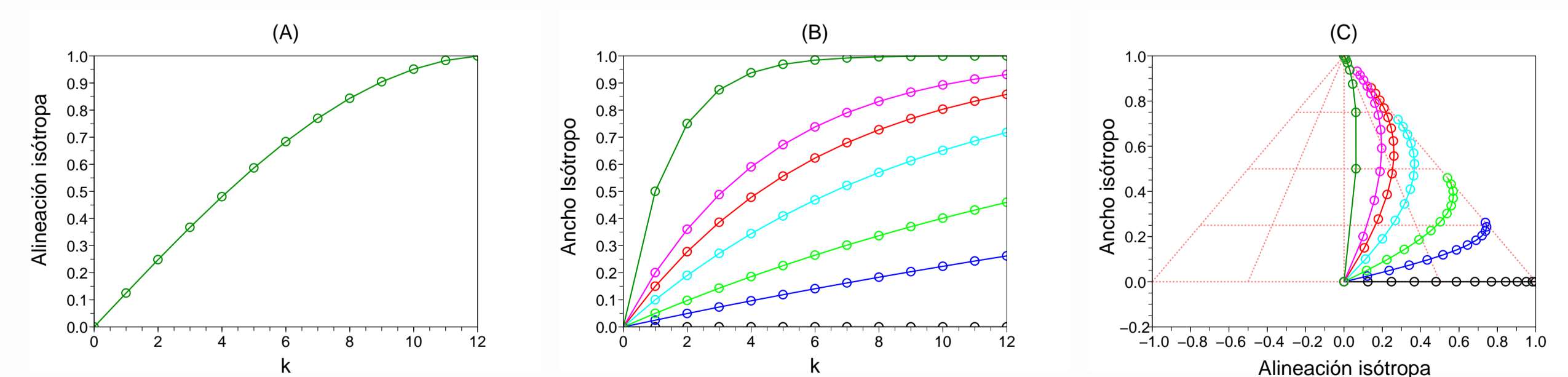


Fig.3: Variación del índice de isotropía en el algoritmo de Grover.

[1] J. García-López y F. G. Mazarío, Modelos continuos de error en computación cuántica. *Primer Congreso Internacional de Matemáticas en Ingeniería y Arquitectura*, Madrid, 2007.

[2] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, W. K. Wootters, *Phys. Rev. A* **54** (1996) 3824.

[3] R. Laflamme, C. Miquel, J. P. Paz, W. H. Zurek, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 198.

[4] M. A. Nielsen y I. L. Chuan, *Quantum computation and quantum information*, 8ª ed., Cambridge University Press, 2005.

[5] L. K. Grover, A fast quantum mechanical algorithm for database search. *In Proceedings, 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, p. 212, 1996.

[6] L. K. Grover, *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997) 325.