Prueba Inicial de Matemática - Ejemplo 1

Instrucciones para la prueba:

- **DURACIÓN**: 3 horas.
- **NO** se puede utilizar material, **NI** calculadora.
- Las consultas SOBRE LA LETRA se harán AL COMIENZO O PROMEDIANDO la prueba.
- La prueba consiste en doce ejercicios, en el primero debe contestarse verdadero o falso a cada afirmación y en los once restantes se indican para cada una 5 opciones de respuesta, de esas 5 opciones, una y sólo una es correcta.
- Si bien puedes utilizar hojas de borrador, para apoyar tus razonamientos y tus cálculos, tu entrega consistirá solamente en la hoja de respuestas que se te entregará junto con el cuestionario, donde marcarás las opciones elegidas; marcarás no más de una respuesta por pregunta, rodeando con un círculo la opción seleccionada.
  Cualquier otra forma de respuesta o si es dudosa la respuesta, será considerada incorrecta.
- Las preguntas indican su valor si son bien contestadas, si se contestan mal o no se contestan valen 0 punto.
- La prueba se considera **aprobada** con 70 puntos o más de los 100 puntos totales.

Cuestionario

Ejercicio 1 (20 puntos, 4 puntos cada afirmación)

Indicar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

Nota: Una afirmación se considera verdadera si lo es en todos los casos que es aplicable. En otro caso diremos que la afirmación es falsa.

1. Sean A, B y C tres conjuntos cualesquiera.
   Entonces necesariamente se cumple $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
2. Se llaman alturas de un triángulo a los segmentos que tienen por extremos el punto medio de un lado y el vértice opuesto.
3. Si en un triángulo ABC, las medidas de los lados opuestos a los ángulos en A, B y C son respectivamente a, b y c, entonces se cumple:
$$\frac{a}{sen(A)} = \frac{b}{sen(B)} = \frac{c}{sen(C)}$$
4. En una simetría axial las rectas perpendiculares al eje son dobles (la imagen de cada punto de ella pertenece a ella) pero no unidas (la imagen de cada punto de ella es él mismo).
5. En un sistema de coordenadas ortogonal del plano se consideran las rectas $(r):\ x + 2y - 3 = 0$ y $(s):\ x - ky + 4 = 0$ con $k \in I\!R$. Si (r) y (s) son perpendiculares, entonces $k = \frac{1}{2}$.

Ejercicio 2 (5 puntos)

$\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}+\frac{3}{10}}$ es igual a:

(a) $\dfrac{1}{4}$ (b) $\dfrac{21}{40}$ (c) 1 (d) $\dfrac{15}{14}$ (e) $\dfrac{9}{4}$

Ejercicio 3 (5 puntos)

Para todo x real, $x \neq 1$, $\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$ es igual a:

(a) $\dfrac{x+2}{2x}$ (b) $\dfrac{x+1}{2x}$ (c) $\dfrac{x}{x-1}$ (d) $\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}$ (e) $\dfrac{x^2+3x}{x^2-1}$

Ejercicio 4 (5 puntos)

Si a y b son números reales tales que $a^2 - 5ab + b - 1 = 0$, entonces:

(a) $b = \dfrac{a}{5} + 1$ (b) $b = a^2 + 5a$ (c) $b = \dfrac{a^2-1}{5a-1}$ (d) $b = \dfrac{a^2}{a+1}$ (e) $b = a$

Ejercicio 5 (5 puntos)

En un sistema de coordenadas ortogonal del plano, la ecuación $x^2 + y^2 - 2\,x + 4\,y = 0$:

(a) corresponde a una circunferencia de centro en punto $(1,-2)$ y pasa por el punto $(0,1)$.
(b) corresponde a una circunferencia de centro en punto $(1,-2)$ y pasa por el punto $(2,0)$.
(c) corresponde a una circunferencia de centro en punto $(4,-2)$ y pasa por el punto $(0,1)$.
(d) corresponde a una circunferencia de centro en punto $(4,-2)$ y pasa por el punto $(2,0)$.
(e) no corresponde a una circunferencia.

Ejercicio 6 (5 puntos)

Si $f : I\!R \to I\!R$ tal que $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 3x+a & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ es continua, entonces a vale:

(a) -3 (b) -1 (c) 0 (d) 2 (e) 4

Ejercicio 7 (5 puntos)

¿Cuántas raíces reales tiene el polinomio $P(x) = x^3 + x - 2$?

(a) *ninguna* (b) *una* (c) *dos* (d) *tres* (e) *cuatro*

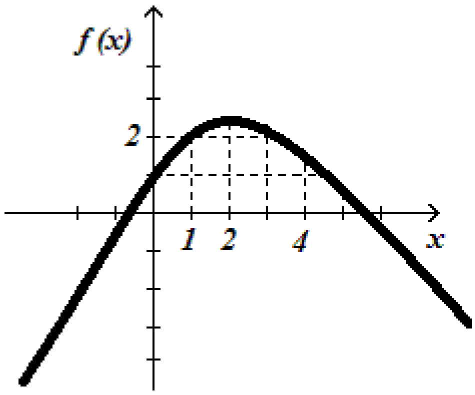
Ejercicio 8 (10 puntos)

$\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - x - 1 - \frac{x^2}{2}}{x^3} =$

(a) 0 (b) $\dfrac{1}{6}$ (c) $\dfrac{1}{2}$ (d) 1 (e) $+\infty$

Ejercicio 9 (10 puntos)

Si $f : I\!R \to I\!R$ es tal que su gráfico se representa en la siguiente figura:



Entonces:

(a) $f(4) \leq 0$ y f es monótonamente decreciente en el intervalo $(2, +\infty)$.
(b) $f(4) \leq 0$ y f es monótonamente creciente en el intervalo $(2, +\infty)$.
(c) $0 < f(4) < 2$ y f es monótonamente decreciente en el intervalo $(2, +\infty)$.
(d) $0 < f(4) < 2$ y f es monótonamente creciente en el intervalo $(2, +\infty)$.
(e) $f(4) \geq 2$.

Ejercicio 10 (10 puntos)

A es un conjunto de números reales. Si la afirmación "$\forall\, x \in A\,,\ x \geq 2$" es falsa, entonces:

(a) es necesariamente verdadera la afirmación "$\forall\, x \notin A\,,\ x < 2$".
(b) es necesariamente verdadera la afirmación "$\exists\, x_0 \notin A \ /\ x_0 < 2$".
(c) es necesariamente verdadera la afirmación "$\forall\, x \in A\,,\ x < 2$".
(d) es necesariamente verdadera la afirmación "$\exists\, x_0 \in A \ /\ x_0 < 2$".
(e) las restantes opciones no son correctas.

Ejercicio 11 (10 puntos)

En un sistema de coordenadas ortogonal del plano, se consideran los puntos $A = (0, 1)$, $B = (2, 1)$ y $C = (1, 0)$ y la recta (r) de ecuación $x + y = 2$. Entonces:

(a) A, B y C determinan una única circunferencia que no tiene puntos en común con (r).
(b) A, B y C determinan una única circunferencia que tiene un único punto en común con (r).
(c) A, B y C determinan una única circunferencia que tiene dos puntos en común con (r).
(d) A, B y C determinan una única circunferencia que tiene más de dos puntos en común con (r).
(e) A, B y C no determinan una única circunferencia.

Ejercicio 12 (10 puntos)

Si la afirmación "En España todos los perros son azules" es verdadera, entonces:

(a) es necesariamente verdadera la afirmación "En Francia todos los perros son azules".
(b) es necesariamente verdadera la afirmación "En Francia algún perro es azul".
(c) es necesariamente verdadera la afirmación "En Francia todos los perros no son azules".
(d) es necesariamente verdadera la afirmación "En Francia algún perro no es azul".
(e) no se puede afirmar nada de lo que ocurre con los perros en Francia.