Isi Haim

Resolviendo problemas matemáticos

π $\forall$ Gauss

$\Leftrightarrow$ $\int$ e^r

Números naturales

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{nLn}$??? Lagrange

Cauchy

UNIVERSIDAD ORT
Uruguay

Ing. Isi HAIM
Profesor honorario de la Universidad de la República (Facultad de Ingeniería), Montevideo-Uruguay
Ex-Catedrático de Matemáticas en la Universidad ORT- Uruguay (Facultad de Ingeniería)

ISBN 978-9974-8130-4-5

Gráfica Don Bosco

DepósitoLegal:

Junio 2009

PREFACIO

Los antiguos pensadores y filósofos griegos opinaban que las matemáticas despiertan la mente y purifican el intelecto, dan vida a nuestras ideas y destierran la ignorancia con la cual nacemos....En mi caso, confieso que amo las Matemáticas porque me producen diversión y alegría. En cierto modo y, expresando mi opinión con cierta cursilería, me invocan formas invisibles del alma.

¿En qué momento se agudizan esas sensaciones? Obviamente cuando se logra resolver un problema, originado a veces en la vida real, que a primera vista parece difícil e inaccesible. Descubrí esa pasión ya en mis años jóvenes, cuando realizaba mis primeros aprendizajes en la enseñanza media, en particular cuando lograba encontrar una solución a algún desafío (especialmente en el área de la Geometría euclídea) que nos lanzaba un inolvidable profesor que me hizo descubrir el atractivo de las matemáticas. Me resulta difícil transmitir la alegría que sentía cuando lograba llegar a la solución...

Estas consideraciones me han dado la idea de presentar algunos problemas especialmente seleccionados, algunos bien simples, para motivar al lector, otros más complejos para desafiarlo. Los he clasificado según distintos capítulos, aunque nunca debe perderse de vista que la Matemática es una sola: un problema de Cálculo puede resolverse con la ayuda de la Geometría, un problema de Geometría con la ayuda de los números complejos, del Cálculo Vectorial o de la Trigonometría, etc.. Cada área puede, en muchas ocasiones, incursionar con éxito en otra área, aparentemente ajena al problema planteado; es como si una mente superior estuviese supervisando las ideas globales para incursionarlas en cualquier área cuando un problema determinado está clamando ser resuelto.

Para facilitar la lectura de este libro y motivar al lector, he organizado la presentación en dos partes: la primera con los enunciados de mis problemas y la segunda con las soluciones que propongo (es probable que el lector experimentado pueda hallar en algunos casos soluciones más simples o más elegantes). Muchos de esos problemas han surgido por haberme topado con ellos a lo largo de mi carrera docente, a veces por desafíos o consultas de algún colega o de algún alumno, otras veces por aparecer indirectamente en algún tema que me encontraba estudiando o desarrollando. Algunos problemas que presento han formado parte de propuestas realizadas en cursos de formación docente.

Como ejemplo de elegancia y sencillez de razonamiento, propongo este conocido resultado de la Geometría elemental:

Demostrar que las tres bisectrices de un triángulo son concurrentes

Esta simple propiedad, que para el iniciado en Geometría no es tan obvia, tiene una solución que forma parte de la belleza de las Matemáticas. Observe el lector la sencillez de este razonamiento:

Si el triángulo es ABC, sea I la intersección de las bisectrices de $\hat{A}$ y $\hat{B}$. Por pertenecer a la bisectriz de $\hat{A}$, el punto I es equidistante de AB y AC; por pertenecer a la bisectriz de $\hat{B}$, el punto I es equidistante de AB y BC. Combinando ambas observaciones, I resulta equidistante de AC y BC; esto significa que I pertenece a la bisectriz de $\hat{C}$. De modo que las tres bisectrices son concurrentes (incidentalmente, I es el incentro de ABC).

Dejamos al lector que recuerde que el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos semirrectas concurrentes es la bisectriz del ángulo formado por esas dos semirrectas y que refresque la muy elemental demostración de esa propiedad.

He agregado al final de mi libro una tercera parte que, a pesar de estar un poco desvinculada del objetivo mencionado, puede invitar al lector a recordar la labor de los grandes maestros que nos dejaron su maravilloso legado, sin el cual no estaríamos en condiciones de resolver los problemas que se plantean en este libro, por más elementales que parezcan. Los que estamos familiarizados con los aspectos básicos de la Aritmética, del Álgebra, del Cálculo y de la Geometría nos olvidamos a menudo que esos aspectos que consideramos obvios o elementales, fueron establecidos y tratados con el rigor indispensable por los grandes pensadores que nos precedieron y que colocaron los pilares de la Historia de la Matemática.

Finalmente, deseo sugerir alguna estrategia para el lector que desee resolver alguno de los problemas que se proponen: además de comprender el problema, sus datos y su objetivo, recomendamos respetar estas dos sugerencias:

a) elegir una buena notación de los datos: mayúsculas, minúsculas, letras griegas, símbolos lógicos, etc.; de este modo, será más natural recordar fórmulas en que intervienen los datos y el manejo de los mismos resultará más familiar;
b) cuando el problema presenta una simetría respecto a ciertos datos del mismo, no deshacer esa simetría en el planteo ni en la búsqueda de la solución, porque de lo contrario aparecerán seguramente dificultades adicionales. Un ejemplo bien simple para ilustrar mi idea: se conoce la suma S y el producto p de dos números incógnitos x,y; no es recomendable plantear el sistema de las dos ecuaciones

y resolverlo por ejemplo eliminando la y para hallar x; se hallarán dos parejas de números, (2,3) y (3,2) en el caso por ejemplo de S=5 y p=6, según el nombre (x o y) que se atribuya a cada uno de los números 2 y 3. Pero el problema sólo necesitaba hallar los números 2 y 3 sin importar el nombre de las incógnitas. Resulta mucho más simple y elegante plantear la ecuación $z^2 - Sz + p = 0$, que, al resolverla, nos dará directamente los dos números que responden al objetivo planteado. He dado este ejemplo para un problema excesivamente elemental para ilustrar en forma muy simple la idea que encierra mi recomendación. En el caso de un problema mucho más complejo y con muchos datos, reiteramos que es muy importante respetar toda simetría que aparezca respecto a determinadas variables del problema

Ing. Isi Haim **Montevideo, año 2009**

PARTE I

ENUNCIADOS

Capítulo I.1 : Problemas de Teoría de Números

Para la comprensión de los ejemplos planteados, será suficiente que el lector tenga conocimientos de la Aritmética básica. En efecto, propondremos problemas que principalmente emplean números naturales, los cuales son prácticamente los únicos que conocen y manejan las personas alejadas de la Matemática. Esos problemas son en general objetivos de la llamada "Matemática Discreta". En esta área existen muchos enunciados que son frecuentemente engañosos respecto al éxito que puede tenerse para encontrar sus soluciones, incluso muchos de ellos son extremadamente "difíciles" y no han podido todavía ser resueltos por los grandes matemáticos de la historia ni por matemáticos actuales; esos problemas son llamados "abiertos" en la literatura matemática. Se han creado importantes premios internacionales (similares al Nobel), como la medalla Fields y el premio Abel, cada uno de ellos dotado de un millón de dólares para los eventuales descubridores. Un ejemplo célebre es la famosa proposición de Fermat, formulada en el siglo XVII , que se llamó "conjetura de Fermat" hasta el año 1995 (¡350 años sin obtenerse la solución definitiva!), en que se transformó en "teorema de Fermat", gracias al Profesor Andrew Wiles de la Universidad de Princeton, que fue premiado con la medalla Fields (recordamos el enunciado de la proposición, que parece bien inofensivo:*"siendo n un entero mayor que 2, no existe ninguna terna (x,y,z) de números enteros que satisface la igualdad* $x^n + y^n = z^n$ *")*.

Pero el lector debe no tener ningún temor pues no le plantearemos en general ningún problema "abierto"; se tratará fundamentalmente de problemas simples; si alguno de ellos es un poco más "difícil", lo indicaremos con el símbolo (*) o eventualmente (**).

Problema 1.1

Sean a = 11....1 un número escrito con 2n dígitos (todos 1) y b = 22.....2 un número escrito con n dígitos (todos 2), ambos en el sistema decimal. Probar que a – b es un cuadrado perfecto.

Problema 1.2

Hallar todos los números naturales n tales que $2^n + 3^n$ es un múltiplo de 7.

Problema 1.3 (*)

Sean x un número natural e y el número obtenido al retirar en x el primer dígito y colocándolo como último dígito. Hallar el mínimo valor de x tal que x/2 = y.

Problema 1.4

¿Cuántos divisores tiene 20! ?

Problema 1.5 Ternas pitagóricas (*)

Hallar todas las ternas (x,y,z) de números enteros tales que $x^2 + y^2 = z^2$ (geométricamente, se trata de hallar todos los triángulos rectángulos que tienen lados enteros).

Incidentalmente, resolver luego las siguientes **aplicaciones**:

a) x,y,z son dos a dos primos entre sí;

b) xyz es siempre múltiplo de 60 (geométricamente, esto significa que en todo triángulo rectángulo de lados enteros el producto de los tres lados es siempre múltiplo de 60).

Problema 1.6

Encontrar 9 números consecutivos, el primero terminado en 1 y el último terminado en 9, tales que cada uno sea divisible por su última cifra. Una primera solución (trivial) es 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. ¿Cuál es la siguiente?

Problema 1.7
Evaluar la suma:

$$1.2^0 + 2.2^1 + 3.2^2 + 4.2^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2001.2^{2000}$$

Problema 1.8
Sea S la suma de todos los elementos del conjunto:

$$\{x \in N / (n-1)^2 \leq x \leq (n+1)^2 - 1\}$$

Probar que S es múltiplo de 6.

Problema 1.9
El desarrollo de $(1+\sqrt{2})^n$, (con n natural ≥ 2), una vez reducido, es obviamente de la forma $A_n + B_n\sqrt{2}$, con A_n, B_n enteros. Probar que A_n y B_n son primos entre sí.

Problema 1.10 : Números de Fermat (*)

Se trata de los números $F_n = 2^{2^n} + 1$, con n= 0,1,2,3,.........

a) Probar que dos cualesquiera de ellos son siempre primos entre sí.
b) Según n, determinar la última cifra de F_n .

Problema 1.11
Se consideran los siguientes (2n+1) números enteros:

$a_1 \ a_2 \ a_3 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ a_{2n+1}$

Esos mismos números se vuelven a escribir en otro orden, cualquiera.

$b_1 \ b_2 \ b_3 \ \ldots\ldots\ldots \ b_{2n+1}$

Probar que el número $(a_1 \pm b_1)(a_2 \pm b_2)\ldots\ldots\ldots\ldots(a_n \pm b_n)$ es par (los signos + y – son arbitrarios para cada paréntesis).

Problema 1.12

Sea S(n) la suma de los dígitos de un natural n. Se define la siguiente sucesión:

$a_1 = 1999!$ $a_2 = S(a_1)$ $a_3 = S(a_2)$ ....

Hallar a_{1999} .

Problema 1.13 **(*)**

En una bolsa hay 100 bolillas numeradas del 1 al 100. Tú retiras de la bolsa 10 bolillas cualesquiera. Si casualmente retiras las bolillas:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

es obvio que puedes separar entre ellas dos sub-grupos que tienen la misma suma, por ejemplo (1,2) y 3, o bien (3,5,6) y (4,10). ¿Será eso siempre posible? ¿Qué pasa por ejemplo si las 10 bolillas que retiraste son:

17, 22, 31, 53, 67, 69, 72, 80, 83, 98 ? (1)

¿Es posible obtener dos sub-grupos con la mencionada propiedad acerca de la suma?

El problema consiste no en hallar algunos dos tales subgrupos sino en **demostrar que, cualquiera sea el conjunto de 10 bolillas extraído de la bolsa, existe siempre una manera (por lo menos una) de separar dos subgrupos disjuntos que tienen la misma suma.**

Se trata de un teorema de existencia, no de unicidad y tampoco de determinación de cómo hallar una pareja de subgrupos en un caso específico de 10 bolillas extraídas (por ejemplo en el caso (1) mencionado más arriba). Si lo deseas, puedes divertirte buscando una pareja, con la tranquilidad de que, de acuerdo al teorema, es seguro que existe alguna y que por lo tanto tus esfuerzos no serán infructuosos.

<u>Problema 1.14</u> (*)
Se consideran los arreglos con repetición de todos los dígitos (o sea 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) tomados de n en n. En cada arreglo, se suman los dígitos que contiene, obteniendo la suma S.
Determinar en cuantos de esos arreglos resulta S=p, siendo p un número dado (obviamente p no puede superar 9n). Se sugiere , para fijar ideas, analizar el caso n=5, p=21 (que es conocido como problema de los “boletos de la suerte”), para llegar así a un resultado numérico; el método sería el mismo para valores cualesquiera de n y p, pero resultaría sumamente engorroso hallar la fórmula h(n,p) que nos diera la cantidad h buscada de arreglos.

<u>Problema 1.15</u> (*)
Este problema es una especie de “juego” entre dos personas, que llamaremos A y B, que conslste en que A “adivine” un número o un objeto pensado por B.
Se trata del siguiente juego: el jugador **A** propone al jugador **B** la consideración de n objetos, que pueden ser cualesquiera: objetos de cualquier clase, números de cualquier naturaleza, etc.. Para que el juego resulte menos engorroso y más práctico y evitar el tener que presentar a **B** los n objetos, se aconseja emplear los n primeros naturales 1,2,3,......,n, que todo el mundo conoce y recuerda fácilmente. El jugador B debe elegir uno de estos números y memorizarlo. **A** le propone luego p planillas que contienen cada una un conjunto de números seleccionados dentro de los n considerados.
Para cada planilla, B debe informar si el elemento memorizado por él pertenece o no a esa planilla (Sí o No). Su respuesta completa para las p planillas debe permitir a A obtener el número pensado por B.
El problema consiste en diseñar las planillas para emplearlas para un determinado n. Para fijar ideas, hacer el diseño en los casos p=3, p=4, p=5, p=6.

<u>Problema 1.16</u> Números casi-perfectos (**)

Un número natural n se llama <u>perfecto</u> cuando la suma de todos sus divisores propios (o sea incluyendo el divisor 1 pero excluyendo el divisor n) coincide con n. Así, por ejemplo 6 es perfecto ya que 1 + 2 + 3 = 6. Si esa suma resulta ser (n – 1) en vez de n, el número se llama <u>casi-perfecto</u>. Así por ejemplo 8 es casi-perfecto ya que 1 + 2 + 4 = 8 – 1.. Resulta muy simple probar que toda potencia entera de 2 es un número casi-perfecto.

El problema que aquí se propone es demostrar el recíproco de esa proposición, o sea: "*todo número casi-perfecto es una potencia de 2*".

<u>Problema 1.17</u>

Sea $\nu(n)$ el número de factores primos distintos en la descomposición del natural n. Por ejemplo $\nu(2) = 1$, $\nu(8) = \nu(2^3) = 1$, $\nu(15) = \nu(3x5) = 2$, $\nu(28) = \nu(2^2x7) = 2$.

Demostrar que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\nu(n)}{n} = 0$

<u>Problema 1.18</u> (*)

Demostrar que para todo real $x \geq 2$, el producto de los primos $\leq x$ es siempre $< 4^{x-1}$.

<u>Problema 1.19</u>

Demostrar que el número n! contiene al factor primo p exactamente $\sum_{k=1}^{+\infty} E(\frac{n}{p^k})$ veces. (Legendre)

$E(\alpha)$ significa "parte entera de α".

Problema 1.20 **(*)**

Probar que para todo n natural: $C_n^{2n} \geq \frac{4^n}{2n}$

Problema 1,21

Probar que hay infinitos primos de la forma 4m + 3 , o sea iguales a 3 en el módulo 4.

Problema 1.22 **(*)**

¿Existe alguna potencia entera de 2 tal que sus dígitos pueden ser rearreglados para formar otra potencia de 2? (No se admite el cero en el primer dígito, por ejemplo 016 no es admitido).

Problema 1.23 (*)

Hallar todos los naturales a,b,n que cumplen:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{n}{a+b} \qquad ,$$

siendo obviamente a ≠ 0, b ≠ 0, a+b ≠ 0.

Problema 1.24

Hallar el mayor entero positivo n tal que $n^3 + 100$ es divisible por n + 10.

<u>Capítulo I.2</u> : Problemas de Álgebra y Análisis

En este capítulo, propondremos algunos problemas de Álgebra y de Cálculo. Si el enunciado del problema contiene temas de Cálculo Vectorial (que consideramos como una herramienta del Álgebra), lo incluiremos en este capítulo; si en cambio se trata de un problema de Geometría y el Cálculo Vectorial se emplea para resolverlo, lo consideraremos como problema de Geometría y lo incluiremos entonces en el Capítulo I.3. Ya hemos mencionado (en nuestro prefacio) que las diferentes áreas de la Matemática se incursionan entre sí y a menudo no resulta demasiado simple definir cual es el área del problema propuesto. Adoptaremos entonces el criterio de clasificación de un problema teniendo en cuenta el enunciado y la naturaleza de la cuestión planteada, sin tener en cuenta la herramienta empleada en la resolución de dicho problema; esa herramienta es a menudo elegida por la persona que lo resuelva, de acuerdo a sus preferencias y a sus conocimientos. Por ejemplo, un problema de Geometría euclídea puede ser resuelto empleando conceptos de la propia geometría (métodos sintéticos clásicos), pero también puede resolverse mediante herramientas de otras áreas, por ejemplo: álgebra de movimientos y de transformaciones usuales, cálculo vectorial, aritmética de los números complejos, relaciones métricas que permitan calcular elementos principales del problema, geometría analítica, etc. Pero el problema propuesto será considerado como problema de Geometría euclídea y no como problema perteneciente al área de la herramienta empleada para resolverlo..

Problema 2.1

Mostrar que la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} L\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ es convergente y hallar su suma.

Problema 2.2 Constante de Euler(*)

Demostrar que la sucesión $H_n - L(n+1)$, siendo H_n la reducida enésima de la serie armónica (con n =1,2,3,........) es convergente. Su límite se conoce como **C,** que es la "constante de Euler". Tomando n suficientemente grande, se puede encontrar que C = 0,577......, siendo exactas esas primeras cifras decimales, pero determinar si C es racional o irracional es un problema "abierto" en la Matemática actual.

Demostrar que también $\lim_{n\to+\infty}(H_n - Ln) = C$.

Aplicación Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n} - L(1+\frac{1}{n})\right]$

Problema 2.3

Siendo x,y,z complejos, hallar todas las soluciones (x,y,z) del sistema:

$$\begin{cases} x+y=z \\ x^2+y^2=z \\ x^3+y^3=z \end{cases}$$

Problema 2.4

a, b, c son tres reales que satisfacen 9a + 11b + 29c = 0. Demostrar que la ecuación en $x \in R$: $ax^3 + bx + c = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo cerrado [0,2] .

<u>Problema 2.5</u> Primer teorema de Guldin

Demostrar que el volumen engendrado por una superficie plana al girar alrededor de un eje que no la atraviesa es igual al producto del área de esa superficie por la longitud de la circunferencia descripta por el centro de gravedad de esa superficie (supuesta homogénea).

Aplicar ese teorema para obtener los siguientes resultados:

a) <u>Volumen del toro</u> : El toro es el cuerpo engendrado por un círculo cuando gira alrededor de un eje de su plano, que no atraviesa al círculo. Se tomarán como datos el radio r del círculo y la distancia R de su centro al eje.

b) <u>Baricentro de un semi-círculo de radio R</u> .

<u>Problema 2.6</u> Segundo teorema de Guldin

Demostrar que el área de una curva plana al girar alrededor de un eje que no la atraviesa es igual al producto de la longitud de ese arco por la longitud de la circunferencia descripta por el centro de gravedad de eses arco (supuesto homogéneo).

Aplicar ese teorema para obtener los siguientes resultados:

a) <u>Área lateral de un cono de revolución</u> : Se definirá el cono por el radio R de su base y la longitud g de su generatriz.

b) <u>Baricentro de una semi-circunferencia de radio R</u> .

c) <u>Área lateral del toro</u> .

<u>Problema 2.7</u>

Demostrar que si las raíces de la ecuación

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (\text{con } a \neq 0)$$

están en progresión geométrica, se cumple $b^3 = a^3c$ y la ecuación admite la raíz $-\frac{b}{a}$. Recíprocamente, demostrar que si se cumple una de las dos últimas condiciones se cumple la otra y la ecuación tiene sus raíces en progresión geométrica.

Aplicación a la resolución de $z^3 + z^2 + 3z +27 = 0$.

Problema 2.8

Hallar $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n \quad + n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}} + \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{\sqrt{n \quad + n.n}}\right)$

Problema 2.9

Hallar $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} . \sqrt[n]{1+\frac{2}{n}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \sqrt[n]{1+\frac{n-1}{n}} \right)$

Problema 2.10

Hallar $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$

Problema 2.11

Sea la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, dada en un referencial ortogonal Oxy. Se considera el punto B(0,b) y se traza una cuerda BP. Hallar para qué posición de P resulta máxima la longitud de BP.

Problema 2.12

Se considera la serie armónica $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. En esa serie, se suprimen todos los términos en que n, escrito en el sistema decimal, contiene alguna cifra 7. Estudiar la convergencia de la serie obtenida.

Problema 2.13 (*)

Demostrar que la serie $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{nLn}$ es divergente.

Problema 2.14 (*)

Sea una sucesión a_n monótona decreciente y tal que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente. Mostrar que lím$(na_n) = 0$.

Problema 2.15 Función Erf(x) (*)

Es sabido que la función e^{-x^2} es muy empleada en el Cálculo de Probabilidades, llamándose "campana de Gauss" a su representación gráfica. Su primitiva, eligiendo la que se anula en x=0, es:

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

Esa primitiva se designa como Erf(x) (del inglés "error-function", debido a su empleo en la teoría de errores) y se la clasifica como "trascendente no elemental" porque no puede expresarse mediante las funciones algebraicas o las trascendentes elementales.
Esbozar una representación gráfica para Erf(x) y demostrar o verificar las siguientes propiedades de Erf(x):

a) Erf(x) = $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \qquad \forall x \in R$

b) Erf(x) es continua y creciente en todo punto de R y su derivada es continua y positiva para todo x

c) Erf(x) es impar

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} Erf(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

e) $-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} < Erf(x) < \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

f) Erf(1) = $1-\frac{1}{3.1!}+\frac{1}{5.2!}-\frac{1}{7.3!}+$..................

g) la curva representativa tiene, para x>0, su concavidad hacia abajo

h) la pendiente de la tangente en el origen es 1.

Problema 2.16 Desigualdad de Cauchy-Schwarz (*)

Demostrar que en un espacio vectorial dotado de un producto interno con la norma $\vec{a}^2 = \vec{a}x\vec{a} = \|\vec{a}\|^2$, se cumple:

$$(\vec{a}x\vec{b})^2 \leq \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2$$

Problema 2.17 (*)

Sea un polinomio de coeficientes reales $x^3 + ax^2 + bx + c$, cuyas tres raíces son reales. Demostrar que esas tres raíces están contenidas en el intervalo:

$$\left[-\frac{a}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{a^2-3b},\ -\frac{a}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{a^2-3b}\right]$$

Verificar la propiedad para los tres polinomios siguientes:

a) $x^3 - 4x^2 + x + 6$

b) $x^3 - x^2 - x + 1$

c) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

Problema 2.18 (*)

Calcular $\int_0^{+\infty} \frac{senx}{x} dx$

Problema 2.19 Números de Bernoulli (**)

Los números de Bernoulli (los designaremos "los B") se definen mediante el desarrollo en serie de Mac-Laurin de la función: R→R $\frac{x}{e^x - 1}$. Se trata de números muy importantes del Análisis Matemático que, entre otras aplicaciones, permiten hallar desarrollos en series de potencias de funciones hiperbólicas y trigonométricas, y también conducen a sumar series numéricas del tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ para p=1,2,3,…..

Los B se definen se definen mediante el desarrollo en serie de Mac-Laurin de la función: R→R $\frac{x}{e^x - 1}$. Se trata de los coeficientes de esa serie de Mac-Laurin multiplicados por los factoriales respectivos, o sea que esos números, designados por B_0 , B_1 , B_2 , ... se definen mediante la identidad:

$$\forall x \in R: \quad \frac{x}{e^x - 1} \equiv \frac{1}{\frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots\dots\dots} \equiv \frac{B_0}{0!} + \frac{B_1}{1!}x + \frac{B_2}{2!}x^2 + \dots\dots\dots\dots$$

a) Determinar los cuatro primeros B, o sea B_0 , B_1 , B_2 y B_3 y justificar que todos los B son <u>racionales</u> .

b) Demostrar que todos los B de índice impar (excepto B_1) son nulos, o sea que $B_{2n+1} = 0$ para $n \geq 1$.

c) Demostrar que:

$$C_0^n B_n + C_1^n B_{n-1} + C_2^n B_{n-2} + \dots\dots\dots\dots + C_n^n B_0 = B_n \ ,$$

lo cual, recordando la fórmula del binomio de Newton, se escribe simbólicamente:

$$(B + 1)_n = B_n \ , \qquad \text{(para n = 2,3,4,.........)}$$

conviniendo en desarrollar el primer miembro empleando sub-índices en vez de exponentes.

d) Hallar B_n conociendo todos los B anteriores, probando que para $n \geq 1$:

$$: \qquad B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{h=2}^{n+1} C_h^{n+1} B_{n+1-h}$$

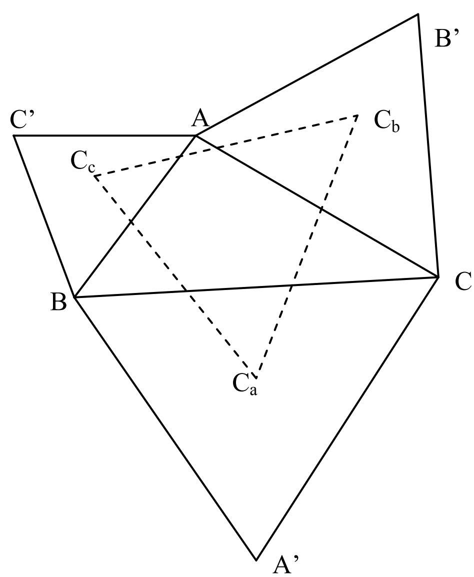
Aplicar esta fórmula para hallar B_4 , a partir de B_0,B_1,B_2,B_3, calculados en (a).

<u>Capítulo I.3</u> : Problemas de Geometría Euclídea

Este capítulo se refiere a problemas de geometría plana, que hemos seleccionado porque, a pesar de sus enunciados elementales y de parecer en general bien simples, no son en verdad triviales y requieren del lector una buena formación y cierta familiaridad y experiencia en la resolución de problemas de Geometría. Las soluciones que propondremos en la parte II manejan en general conceptos básicos de Geometría euclídea pero en algunos casos nos auxiliaremos con herramientas de otras áreas, como ya mencionado (transformaciones, cálculo, aritmética de complejos, cálculo vectorial, trigonometría, etc.), sin perjuicio de clasificar el problema como ejemplo de Geometría euclídea. Quizás el lector experimentado pueda encontrar soluciones propias de la geometría sintética, más simples o más elegantes que las que proponemos.

Problema 3.1
Se da un triángulo ABC y se considera el punto B' sobre la prolongación de AB tal que $\frac{AB'}{AB}=\alpha$ y el punto C' sobre la prolongación de AC tal que $\frac{AC'}{AC}=\beta$, siendo α y β dos reales positivos. Sobre el segmento BC se toma el punto D tal que $\frac{DB}{DC}=\frac{\beta}{\alpha}$ y, sobre la prolongación de AD, el punto D' tal que $\frac{AD'}{AD}=\alpha+\beta$. Mostrar que AB'D'C' es un paralelogramo.

Problema 3.2 **Problema de Napoleón (*)**



Sea ABC un triángulo cualquiera. Sobre sus lados, se construyen triángulos equiláteros, exteriormente al triángulo dado. Demostrar que el triángulo de los centros de esos triángulos equiláteros, o sea $C_aC_bC_c$, es a su vez un triángulo equilátero.

Problema 3.3

Demostrar que en todo triángulo, se cumple $R \geq 2r$, siendo R el circunradio y r el inradio.

Problema 3.4

En un triángulo ABC cualquiera, sean AA´, BB¨, CC´ las alturas y H el ortocentro. Demostrar que

$$\overline{HA}.\overline{HA'} = \overline{HB}.\overline{HB'} = \overline{HC}.\overline{HC'}$$

Problema 3.5

Dadas 3 rectas paralelas, construir un triángulo equilátero que tenga un vértice sobre cada una de las rectas. Calcular además el lado del triángulo conociendo las distancias mutuas entre las rectas.

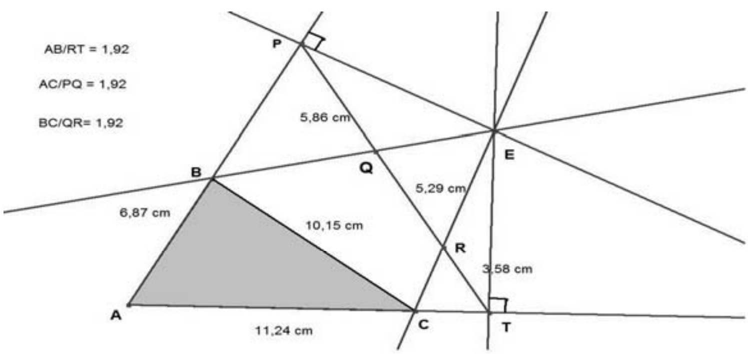
Problema 3.6

En un círculo dado se consideran los lados siguientes para los polígonos regulares inscriptos: a para el pentágono, b para el decágono y c para el hexágono. Probar que el triángulo de lados a, b, c es rectángulo, o sea que $a^2 = b^2 + c^2$.. .

Problema 3.7

Sea un cuadrilátero ABCD. Se toma el punto medio E del lado BC y el punto medio F del lado opuesto AD. Se une E con A y D, y F con B y C. Sean $G = AE \cap BF$ y $H = CF \cap DE$. Sean S_1, S_2 , S_3, S_4 las áreas de los triángulos AGF, CHE, BGE, DHF respectivamente. Probar que: $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$.

Problema 3.8 **(*)**
Dado un triángulo cualquiera ABC, se considera el exincentro E ubicado dentro del ángulo $\hat{A}$. Desde E, se trazan las perpendiculares a AB y a AC, respectivamente EP y ET. El segmento PT corta en Q a la bisectriz exterior de $\widehat{B}$ y en R a la bisectriz exterior de $\hat{C}$.
Demostrar que los segmentos QR, PQ y RT son proporcionales, en ese orden, a los lados BC, AC y AB del triángulo, o sea que: $\dfrac{QR}{a} = \dfrac{PQ}{b} = \dfrac{RT}{c}$
Para mejor lectura de ese enunciado, mostramos la figura con dimensiones particulares elegidas para esta figura:



Problema 3.9
Sea ABC un triángulo inscripto en una circunferencia. Las bisectrices de los ángulos A, B, C cortan a la circunferencia en D, E, F respectivamente. Probar que EF es perpendicular a AD.

Problema 3.10 (*)

En un triángulo ABC, la bisectriz de $\widehat{B}$ corta a AC en D y la bisectriz de $\hat{C}$ corta a AB en E. Si I es el incentro del triángulo, demostrar que si ID = IE, entonces ABC debe ser isósceles (AB=AC) o bien $\widehat{A}$ debe ser 60º (pueden ocurrir ambas consecuencias ya que no son incompatibles)

PARTE II

SOLUCIONES PROPUESTAS

Nota : Para facilitar la tarea del lector, hemos encabezado la solución del problema con una repetición del enunciado del mismo.

Capítulo II.1 Soluciones para los problemas del capítulo I.1 (Teoría de Números)

Problema 1.1

Sean a = 11....1 un número escrito con 2n dígitos (todos 1) y b = 22.....2 un número escrito con n dígitos (todos 2), ambos en el sistema decimal. Probar que a – b es un cuadrado perfecto.

Solución

Se trata de progresiones geométricas de razón 10

$$a = 1+10+10^2+......+10^{2n-1} = \frac{10^{2n}-1}{9}$$

$$b = 2(1+10+10^2+.....+10^{n-1}) = 2\frac{10^n-1}{9}$$

Entonces

$$a-b = \frac{10^{2n}-1-2(10^n-1)}{9} = \frac{(10^n+1)(10^n-1)-2(10^n-1)}{9}$$

$$= \frac{(10^n-1)(10^n+1-2)}{9} = \frac{(10^n-1)^2}{9} = \left(\frac{10^n-1}{3}\right)^2$$

Se trata de um cuadrado perfecto ya que (10^n-1) es obviamente divisible por 3.

Problema 1.2

Hallar todos los números naturales n tales que $2^n + 3^n$ es un múltiplo de 7.

Solución

Se trata de hallar los n tales que $2^n+3^n \equiv 0$ (módulo 7).
Estudiamos la congruencia de módulo 7 para 2^n y 3^n .

Para n = 1,2,3, 4,5,6, ... (período de 3 elementos), 2^n resulta congruente con 2,4,1 para cada valor de n en el período .En cambio, para n = 1,2,3,4,5,6, 7,8,9,10,11,12,...... (período de 6 elementos), 3^n resulta congruente con 3,2,6,4,5,1 para cada valor de n en el período. Siendo 6 el m.c.m. de 3 y 6, resultará un período común de 6 elementos (1,2,3,4,5,6).
Aplicamos la propiedad de las congruencias:

$$(a \equiv c,\ b \equiv d) \Rightarrow a + b \equiv c + d\ ,$$

Resultará que para n =1,2,3,4,5,6 , $2^n + 3^n$ es congruente en módulo 7 com (respectivamente):

$$2+3=5,\ 4+2=6,\ 1+6=7\equiv 0,\ 2+4=6,\ 4+5=9\equiv 2,\ 1+1=2$$

El único caso en que $2^n + 3^n \equiv 0$ (módulo 7) tiene lugar para n = 3, 9, 15, ..., de modo que la solución es:

$$\boxed{\begin{array}{l} n = 6i - 3 \\ \quad \text{con } i = 1, 2, 3, ... \end{array}} \quad \text{o sea} \quad \boxed{n \equiv 3 \text{ (módulo 6)}}$$

<u>Problema 1.3</u> (*)

Sean x un número natural e y el número obtenido al retirar en x el primer dígito y colocándolo como último dígito. Hallar el mínimo valor de x tal que x/2 = y.

<u>Solución</u>

Sea $n \geq 2$ el número de dígitos de x en notación decimal. En esa notación, escribimos el número x:

$$x = a_1a_2 \text{ .... } a_n$$

De acuerdo al enunciado:

$$y = a_2a_3 \text{ .... } a_1$$

Imponemos x = 2y :

$a_1.10^{n-1} + a_2.10^{n-2} + \text{.......} \ a_{n-1}.10 + a_1 =$

$$2(a_2.10^{n-1} + a_3.10^{n-2} + \ldots\ldots. a_n.10 + a_1) ,$$

o sea:

$a_1(10^{n-1}-2) = 19(a_2.10^{n-2} + a_3.10^{n-3} + \ldots\ldots. a_{n-1}.10 + a_n) \Rightarrow$

$$a_1(10^{n-1}-2) = 19(x-a_1.10^{n-1})$$

Despejamos x:

$$x = \frac{2a_1(10^n - 1)}{19}$$

Para un n dado, el menor a_1 es 1, de modo que

$$x_{mín} = \frac{2(10^n - 1)}{19}$$

Como estamos buscando um número x entero, 10^n-1 debe ser múltiplo de 19, o sea $10^n - 1 \equiv 0$ (módulo 19), o también $10^n \equiv 1$ (módulo 19) . Buscaremos, para los valores posibles de n, o sea n = 2,3,....... , cual es el menor, si existe, para el cual resulta $10^n \equiv 1$ (observar que $10^n \equiv \alpha \Rightarrow 10^{n+1} \equiv 10\alpha$):

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$10^n \equiv$	5	12	6	3	11	15	17	18	9

n	11	12	13	14	15	16	17	18
$10^n \equiv$	14	7	13	16	8	4	2	1

Nos detuvimos en n = 18 por ser el primero para el cual resultó$10^n \equiv 1$ (módulo 19), de modo que:

$$\boxed{x_{mín} = \frac{2(10^{18} - 1)}{19}}$$

La notación decimal de ese número es:

$$\boxed{x_{mín} = 105263157894736842}$$

y por lo tanto, desplazando la primera cifra de x::

$$\boxed{y = 52631578947368421}$$

que, verificamos, es la mitad de x.

Problema 1.4

¿Cuántos divisores tiene 20 ! ?

Solución

$$20! = 2.3.4.5........20$$

Descomponemos cada factor en sus factores primos:

$2 = 2$	$11 = 11$	$20 = 2^2.5$
$3 = 3$	$12 = 2^2.3$	
$4 = 2^2$	$13 = 13$	
$5 = 5$	$14 = 2.7$	
$6 = 2.3$	$15 = 3.5$	
$7 = 7$	$16 = 2^4$	
$8 = 2^3$	$17 = 17$	
$9 = 3^2$	$18 = 2.3^2$	
$10 = 2.5$	$19 = 19$	

Entonces $20! = 2^{18}.3^8.5^4.7^2.11.13.17.19$

Por un conocido teorema, el número de divisores de 20! será:

$$19.9.5.3.2.2.2.2 = \boxed{41040}$$

entre los que se incluye el divisor 1.

<u>Problema 1.5</u> Ternas pitagóricas (*)
Hallar todas las ternas (x,y,z) de números enteros tales que $x^2 + y^2 = z^2$ (geométricamente, se trata de hallar todos los triángulos rectángulos que tienen lados enteros).
Incidentalmente, demostrar luego las siguientes propiedades:
a) x,y,z son dos a dos primos entre sí;
b) xyz es siempre múltiplo de 60 (geométricamente, esto significa que en todo triángulo rectángulo de lados enteros el producto de los tres lados es siempre múltiplo de 60).

<u>Solución</u>
(x,y) serían los catetos del triángulo rectángulo y z sería la hipotenusa..
Buscaremos ternas (x,y,z) que no tengan ningún divisor común porque si k fuera un divisor común, o sea x=kx', y=ky', z=kz', la terna (x',y',z') también sería pitagórica y no sería una solución esencialmente distinta de la (x,y,z) ya que ambas ternas formarían triángulos semejantes. Esas ternas que no tienen ningún divisor común se llaman "ternas primarias", que serán el objetivo de nuestra búsqueda.
Observemos que (x, y) no pueden ser ambos pares porque si lo fueran, también sería par z, de modo que la terna (x,y,z) no sería primaria.. Para fijar ideas, tomemos x impar y arbitrario.
Observemos que $x^2 = z^2 - y^2 = (z+y)(z-y)$, donde los factores (z+y) y (z-y).deben ser obviamente impares; pero además esos dos factores son primos entre sí porque si tuvieran un divisor común k (impar, por lo dicho), o sea:

$$\begin{cases} z+y=kq \\ z-y=kq' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y=k(q-q') \\ 2z=k(q+q') \end{cases},$$

k resultaría entonces un divisor común de (2y) y (2z); pero al ser k impar, sería un divisor común de (y) y (z). Por otra parte, de la igualdad $x^2 = k^2qq'$, se deduciría que k^2 es un divisor de x^2, por lo tanto k sería un divisor de x. Tendríamos

en definitiva que k sería un divisor común de x,y,z, lo cual es absurdo ya que la terna (x,y,z) no sería primaria.
Pero descomponer x^2 en dos factores primos entre sí equivale a descomponer x en dos factores primos entre sí. Las soluciones son entonces:

$$x = uv \qquad \left.\begin{array}{l} z + y = u^2 \\ z - y = v^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{u^2 - v^2}{2} \\ z = \dfrac{u^2 + v^2}{2} \end{cases}$$

(u,v) primos entre sí

Resumiendo: Las soluciones primarias están dadas por:

$$x = uv \qquad y = \frac{u^2 - v^2}{2} \qquad z = \frac{u^2 + v^2}{2}$$

donde (u,v) son números enteros arbitrarios, impares y primos entre sí (u>v). Es muy fácil ver que resulta siempre y par, z impar.

Cálculo de las primeras ternas primarias:

Las calculamos para los primeros valores de x: 3,5,.....,15. Al escribir x como uv, debemos tener la precaución de elegir siempre u>v :

x = 3 = 3.1 $\Rightarrow$ (3,4,5)
x= 5 = 5.1 $\Rightarrow$ (5,12,13)
x= 7 = 7.1 $\Rightarrow$ (7,24,28)
x = 9 = 9.1 $\Rightarrow$ (9,40,41)
x =11 = 11.1 $\Rightarrow$ (11,60,61)
x = 13 = 13.1 $\Rightarrow$ (13,84,85)
x = 15 = 15.1 $\Rightarrow$ (15,112,113)
= 5.3 $\Rightarrow$ (15,8,17)

Aplicación a las propiedades enunciadas

a) x,y,z son dos a dos primos entre sí

Ya hemos visto que x,y,z no admiten algún divisor común. Pero veremos que además esos números son primos dos a dos.

a1) x,y primos entre sí

Basta probar que no admiten ningún divisor primo común. Supongamos que tuvieran un divisor común k:

$$\begin{cases} x = kq \\ y = k'q \end{cases} \Rightarrow \quad z^2 = k^2(q^2 + q'^2)$$

Entonces k^2 es un divisor de z^2 ; pero siendo k primo, resultaría que k es divisor de z, lo cual es absurdo pues se vió que x,y,z no tienen divisor común.

a2) x,z primos entre sí

Demostración análoga por el absurdo, despejando y^2.

a3) y,z primos entre sí

Demostración análoga, despejando x^2.

b) xyz es $\overline{60}$ (múltiplo de 60)

Probaremos que siempre hay un factor múltiplo de 3, uno de 4 y uno de 5.

b_1) congruencia módulo 3:

Trabajamos con los parámetro (u,v) de la fórmula obtenida para las ternas primarias. En la congruencia de módulo 3, tendremos los siguientes casos:

$$\begin{cases} u \equiv 0 \\ u \equiv 1 \\ u \equiv 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v \equiv 0 \\ v \equiv 1 \\ v \equiv 2 \end{cases}$$

Las combinaciones posibles con u,v primos entre sí son (0,1),(0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2). Para cada una de esas combinaciones, tendremos, aplicando propiedades de la congruencia:

$$\begin{pmatrix} (0,1) \\ (0,2) \\ (1,0) \\ (2,0) \end{pmatrix} \Rightarrow \ uv \equiv 0 \ \Rightarrow \ x \equiv 0 \ \Rightarrow \ \underline{x = \dot{3}}$$

$$\left\{\begin{array}{l}(1,1)\\(1,2)\\(2,1).\\(2,2)\end{array}\right. \Rightarrow\ u^2 - v^2 \equiv 0 \ \Rightarrow\ y \equiv 0 \ \Rightarrow\ \underline{y = \dot{3}}$$

Vemos que siempre uno de los catetos es múltiplo de 3

b2) congruencia módulo 4:

En este caso hay sólo 5 combinaciones posibles (descartamos los casos en que u,v no son ambos impares o no son primos entre sí): Esas combinaciones son (0,1), (0,3), (1,0), (1,1), (1,3), Se verifica que en los tres primeros, x resulta múltiplo de 4 y en los otros dos y resulta múltiplo de 4. También siempre uno de los catetos es múltiplo de 4

b3) congruencia módulo 5:

Descartando el (0,0), caso en el cual x,y no serían primos entre sí, quedan 24 casos posibles, entre los cuales la x resulta múltiplo de 5 en 8 casos, la y en 6, y la z en 10, o sea que siempre hay un lado (cateto o hipotenusa) múltiplo de 5.

Queda entonces probada la propiedad (b).

Problema 1.6

Encontrar 9 números consecutivos, el primero terminado en 1 y el último terminado en 9, tales que cada uno sea divisible por su última cifra. Una primera solución (trivial) es 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. ¿Cuál es la siguiente?

Solución

Sea x el número anterior al primero de los buscados, que obviamente termina en 0. Los 9 números buscados serán entonces:

x+1 x+2 x+3 x+4 x+5 x+6 x+7 x+8 x+9

Las condiciones a imponer son:

$$x + 1 = \dot{1} \quad \Rightarrow \quad x = \dot{1} - 1 = \dot{1} \quad \text{(condición superflua)}$$
$$x + 2 = \dot{2} \quad \Rightarrow \quad x = \dot{2} - 2 = \dot{2}$$
$$x + 3 = \dot{3} \quad \Rightarrow \quad x = \dot{3} - 3 = \dot{3}$$
$$x + 4 = \dot{4} \quad \Rightarrow \quad x = \dot{4} - 4 = \dot{4}$$
$$x + 5 = \dot{5} \quad \Rightarrow \quad x = \dot{5} - 5 = \dot{5}$$
$$x + 6 = \dot{6} \quad \Rightarrow \quad x = \dot{6} - 6 = \dot{6}$$
$$x + 7 = \dot{7} \quad \Rightarrow \quad x = \dot{7} - 7 = \dot{7}$$
$$x + 8 = \dot{8} \quad \Rightarrow \quad x = \dot{8} - 8 = \dot{8}$$
$$x + 9 = \dot{9} \quad \Rightarrow \quad x = \dot{9} - 9 = \dot{9}$$

Para que esas condiciones se cumplan, es suficiente que x sea múltiplo de 5, de 7, de 8 y de 9. El menor x será entonces el m.c.m de 5,7,8,9, o sea : 5x7x8x9 = 2520. La solución siguiente a la trivial 1,2,3,…..9 será entonces:

$$\boxed{2521 \quad 2522 \quad 2523 \quad 254 \quad 2525 \quad 2526 \quad 2527 \quad 2528 \quad 2529}$$

Problema 1.7

Evaluar la suma:

$$1.2^0 + 2.2^1 + 3.2^2 + 4.2^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2001.2^{2000}$$

Solución

Se trata de hallar $S = \sum_{n=1}^{2001} n.2^{n-1}$

El término general es:

$$a_n = n.2^{n-1} \qquad \text{, siendo} \quad a_{n+1} = (n+1)2^n = n.2^n + 2^n$$

Se deduce entonces la fórmula de recurrencia:

$$\underline{a_{n+1} = 2a_n + 2^n}$$

Pueden entonces escribirse los 2001 términos de la suma de este modo:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2a_1 + 2$$
$$a_3 = 2a_2 + 2^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{2001} = 2a_{2000} + 2^{2000}$$

Sumando miembro a miembro:

$$S = 2(a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_{2000}) + (1+2+2^2+\ldots\ldots+2^{2000})$$

El primer paréntesis es $S - a_{2001}$, el segundo es una suma de términos en progresión geométrica de razón 2, de donde:

$$S = 2(S - a_{2001}) + (2^{2001} - 1)$$

De allí podemos despejar S:

$$\boxed{S = 2000.2^{2001} + 1}$$

Problema 1.8

Sea S la suma de todos los elementos del conjunto:

$$\{x \in N / (n-1)^2 \le x \le (n+1)^2 - 1\}$$

Probar que S es múltiplo de 6.

Solución

Tenemos $n^2 - 2n + 1 \le x \le n^2 + 2n$, de modo que la longitud del intervalo que contiene a x es:

$$(n^2 + 2n) - (n^2 - 2n + 1) = 4n - 1,$$

Por lo tanto el conjunto M contiene 4n números naturales, o sea 4n valores de x (consecutivos). El menor es $a = (n-1)^2$, de modo que $S = a + (a+1) + (a+2) + \ldots.. + (a+4n-1)$

Se trata de 4n números en progresión aritmética de razón 1 y por lo tanto:

$$S = 4n\frac{a+a+4n-1}{2} = 4na + 8n^2 - 2n$$

Reemplazando el valor de a y operando:

$$\underline{S = 2n(2n^2 + 1)}$$

Obviamente, S es múltiplo de 2 para todo n. Pero también es múltiplo de 3; en efecto, en la congruencia de módulo 3, las posibilidades para n son: $n \equiv 0$, $n \equiv 1$, $n \equiv 2$.

$$n \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad S \equiv 0$$
$$n \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad S \equiv 2.3 = 6 \equiv 0$$
$$n \equiv 2 \quad \Rightarrow \quad S \equiv 4.9 = 36 \equiv 0 \,,$$

de modo que S es siempre múltiplo de 3.
S es entonces siempre múltiplo de 6.

Problema 1.9

El desarrollo de $(1+\sqrt{2})^n$, (con n natural ≥ 2), una vez reducido, es obviamente de la forma $A_n + B_n\sqrt{2}$, con A_n , B_n enteros. Probar que A_n y B_n son primos entre sí.

Solución

Siendo $(1+\sqrt{2})^n \;=\; A_n + B_n\sqrt{2}$, es obvio que :

$$(1-\sqrt{2})^n \;=\; A_n - B_n\sqrt{2}$$

Multiplicando miembro a miembro, resulta

$$A_n^2 - 2B_n^2 = (-1)^n$$

Supongamos que A_n y B_n tuvieran el divisor común k (>1):

$$\begin{cases} A_n = ka \\ B_n = kb \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k^2\,(a^2 - 2b^2) = (-1)^n$$

Pero el 2º miembro es 1 o -1, según la paridad de n; tratándose de números todos enteros, k^2 sólo puede ser 1, o sea que $k = 1 \Rightarrow$ contradicción.

Problema 1.10 : Números de Fermat (*)

Se trata de los números $F_n = 2^{2^n} + 1$, con n = 0,1,2,3,.........

a) Probar que dos cualesquiera de ellos son siempre primos entre sí.

b) Según n, determinar la última cifra de F_n .

Solución

a)

Paso 1 : Probaremos que $\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2$,

para n = 1,23…..

Llamaremos P_n a esa propiedad y la probaremos por inducción completa:

Se cumple P_1 , o sea $F_0 = F_1 - 2$, ya que $F_0=3$, $F_1=5$

También se cumple $P_i \Rightarrow P_{i+1}$; en efecto:

$$\prod_{k=0}^{i} F_k = (\prod_{k=0}^{i-1} F_k)F_i = (F_i - 2)F_i = F_i^2 - 2F_i$$

Reemplazando F_i por su valor, se obtiene $F_{i+1} - 2$, lo cual demuestra P_{i+1}

Paso 2: Sean F_n y F_m dos números de Fermat cualesquiera, con m>n . Siendo n≥0, tendremos m≥1 y por lo tanto le podremos aplicar la propiedad demostrada en el paso 1:

$$F_0F_1F_2 \ldots\ldots F_n \ldots\ldots F_{m-1} = F_m - 2$$

Si d>1 fuera un divisor común de F_n y F_m , tendríamos : kd = k'd - 2 $\Rightarrow$ 2 = (k' – k)d , con k'>k. Entonces d sería un divisor de 2, o sea d=2, lo cual es absurdo ya que los números de Fermat son impares. Esto demuestra que F_n y F_m son primos entre sí.

b) Tenemos $F_0 = 3$, $F_1 = 5$ y para n >1:

$$F_n = 2^{2^{2}.2^{n-2}} + 1 = 16^{2^{n-2}} + 1$$

Pero toda potencia de 16 termina en 6, por lo tanto F_n termina en 7.

Resumiendo: n = 0 última cifra 3
n = 1 última cifra 5
n ≥ 2 última cifra 7

Problema 1.11

Se consideran los siguientes (2n+1) números enteros:

a_1 a_2 a_3 .... a_{2n+1}

Esos mismos números se vuelven a escribir en otro orden, cualquiera.

b_1 b_2 b_3 .... b_{2n+1}

Probar que el número $(a_1 \pm b_1)(a_2 \pm b_2)............(a_n \pm b_n)$ es par (los signos + y – son arbitrarios para cada paréntesis)

Solución

Razonaremos por el absurdo.

Supongamos que el número es impar. Entonces todos los paréntesis son impares, de modo que cada paréntesis contiene un sumando par y otro impar. Hay entonces exactamente (2n+1) números pares y (2n+1) impares en el conjunto:

$(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{2n+1}, b_1, b_2, \ldots\ldots, b_{2n+1})$ (C)

Pero, por ejemplo, los eventuales pares que existan entre los a_i dados se repiten en el conjunto de los b_i , de modo que la cantidad total de pares de (C) debe ser un número par y no puede ser (2n+1) ⇒ contradicción.

Problema 1.12

Sea S(n) la suma de los dígitos de un natural n. Se define la siguiente sucesión:

$a_1 = 1999!$ $a_2 = S(a_1)$ $a_3 = S(a_2)$ ....

Hallar a_{1999} .

Solución :

Observemos que siendo a_1 múltiplo de 9, también a_2 será múltiplo de 9 , pues si un número es múltiplo de 9, la suma de sus cifras también lo es; entonces a_3 es múltiplo de 9, y así sucesivamente: todos los números de la sucesión son múltiplos de 9.

Los 1999 factores que componen a a_1 son todos menores que 2000, de modo que $a_1 < 2000^{1999} < 2000^{2000} < 10000^{2000} = 10^{8000}$ y entonces a_1 tiene menos de 8000 cifras, de lo que se deduce que $a_2 < 8000 \times 9 = 72000$..

Entre los números menores que 72000, el que tiene la mayor suma de cifras es 69999, siendo 42 esa suma, por lo tanto $a_3 \leq 42$. Siendo a_3 múltiplo de 9, sus posibles valores de a_3 son 36, 27, 18 y 9; en todos estos casos, resulta $a_4 = 9$ y por lo tanto todos los siguientes son 9. En particular:

$$\boxed{a_{1999} = 9}$$

.

Problema 1.13 (*)

En una bolsa hay 100 bolillas numeradas del 1 al 100. Tú retiras de la bolsa 10 bolillas cualesquiera. Si casualmente retiras las bolillas:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

es obvio que puedes separar entre ellas dos sub-grupos que tienen la misma suma, por ejemplo (1,2) y 3, o bien (3,5,6) y (4,10). ¿Será eso siempre posible? ¿Qué pasa por ejemplo si las 10 bolillas que retiraste son:

17, 22, 31, 53, 67, 69, 72, 80, 83, 98 ? (1)

¿Es posible obtener dos sub-grupos con la mencionada propiedad acerca de la suma?

El problema consiste no en hallar algunos dos tales subgrupos sino en **demostrar que, cualquiera sea el conjunto de 10 bolillas extraído de la bolsa, existe siempre una manera (por lo menos una) de separar dos subgrupos disjuntos que tienen la misma suma.**

Se trata de un teorema de existencia, no de unicidad y tampoco de determinación de cómo hallar una pareja de subgrupos en un caso específico de 10 bolillas extraídas (por ejemplo en el caso (1) mencionado más arriba). Si lo deseas, puedes divertirte buscando una pareja, con la tranquilidad de que, de acuerdo al teorema, es seguro que existe alguna y que por lo tanto tus esfuerzos no serán infructuosos.

Solución

Por el desarrollo de $(x+a)^{10}$, sabemos que $C_0^{10} + C_1^{10} + C_2^{10} + ... + C_{10}^{10} = 2^{10} = 1024$ (basta hacer x=1, a=1). Pero la cantidad de subgrupos propios (no tenemos en cuenta el subgrupo vacío ni el que contiene los 10 elementos) que pueden formarse con 10 elementos es $C_1^{10} + C_2^{10} + ... + C_9^{10}$, o sea $2^{10} - 2 = 1022$.

Entre esos subgrupos, el que tendrá mayor suma es el grupo de 9 bolillas con numeración la mayor posible, o sea:

(92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100) ,

cuya suma asociada es 864.

Suponemos entonces escritos los 1022 subgrupos y asociamos cada uno con su suma. Tendremos entonces 1022 números (esas sumas) todos menores que 865. Por el “principio del palomar”, esos 1022 números no pueden ser todos distintos; existirán con seguridad dos coincidentes, para los cuales escribimos los dos subgrupos asociados a esos dos números coincidentes. Esos dos subgrupos tienen sumas asociadas iguales. Pero no sabemos si son disjuntos: si no lo son, suprimimos en los dos subgrupos hallados los números de bolillas que coinciden y obtenemos otros dos subgrupos, disjuntos y de igual suma (a las dos sumas originales les restamos lo mismo). Queda pues probado que existen por lo menos dos subgrupos disjuntos con sumas iguales.

Observación :

Si en vez de retirar 10 bolillas de la bolsa se retiran **b** bolillas, en lugar de 1022 y 865, los números a comparar para poder aplicar el "pigeon hole principle" (php) son ($2^b - 2$) y $\frac{(b-1)(202-b)}{2}+1$, lo cual se reduce a comparar la exponencial 2^b con la parábola $-\frac{b^2}{2}+\frac{203}{2}b-99$. El número b es naturalmente natural; estudiando el gráfico de ambas curvas, se ve fácilmente que cuando 1<b<10, la parábola está por encima de la exponencial, mientras que a partir de b = 10, la exponencial está por encima de la parábola. Esta situación nos permite afirmar que para b = 10, 11, ..., 99, al retirar b bolillas de la bolsa, puede repetirse el razonamiento basado en el "php", lo cual confirma el teorema para todos los valores posibles b ≥ 10. El valor b = 10 elegido para el ejemplo es el menor que permite la aplicación del "php".

Hacemos notar que nuestra demostración sólo asegura la validez del teorema para b≥10 porque puede aplicarse el mismo razonamiento basado en el php. También asegura que el php no puede aplicarse en la misma forma para b<10, pero eso no significa que el teorema no se cumple para b<10. Es por supuesto muy simple verificar directamente que el teorema no se cumple para b= 2, 3, 4, hallando rápidamente contraejemplos.. Pero ¿qué pasa cuando b = 5, 6, 7, 8, 9 ?, En esos casos, la cantidad de conjuntos de b bolillas elegidas entre las 100 posibles y la cantidad de subgrupos de esos conjuntos ya comienzan a ser demasiado numerosos para poder realizar un verificación directa. Dejamos que el lector eventualmente analice esos casos de $b < 10$.

Problema 1.14 **(*)**

Se consideran los arreglos con repetición de todos los dígitos (o sea 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) tomados de n en n. En cada arreglo, se suman los dígitos que contiene, obteniendo la suma S.
Determinar en cuantos de esos arreglos resulta S=p, siendo p un número dado (obviamente p no puede superar 9n). Se sugiere , para fijar ideas, analizar el caso n=5, p=21 (que es conocido como problema de los "boletos de la suerte"), para llegar así a un resultado numérico; el método sería el mismo para valores cualesquiera de n y p, pero resultaría sumamente engorroso hallar la fórmula h(n,p) que nos diera la cantidad h buscada de arreglos.

Solución

Comenzaremos por analizar el caso $n = 5$, $p = 21$ para exponer un método que emplea el Cálculo Combinatorio.
Los boletos de transporte colectivo tienen un número de serie de 5 dígitos. La cantidad de boletos es pues 100000 (existe el boleto 00000). Es una vieja costumbre decir que si esas cifras suman "21", se tendrá buena suerte. Nuestro problema en ese caso es entonces determinar la cantidad de "boletos de la suerte."
Sean A,B,C,D,E las posiciones de los números que aparecen en el boleto. El problema planteado es equivalente al siguiente: disponemos de 21 caramelos y A;B;C;D;E son 5 niños; vamos tomando un caramelo y lo damos a uno de los niños, hasta agotar los 21 caramelos. Si a,b,c,d,e son las cantidades de caramelos (o sea los dígitos correspondientes

en el boleto) que habrán recibido al final los distintos niños, sabemos que:

$$a + b + c + d + e = 21$$

Además, tratándose de dígitos, tenemos las restricciones siguientes:

a,b,c,d,e son naturales que cumplen $0 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 9$, $0 \leq d \leq 9$, $0 \leq e \leq 9$.

<u>Paso 1</u> :

En este paso, no tendremos en cuenta la restricción ≤ 9. En la primera entrega, elegimos por ejemplo al niño B, en la segunda E y así sucesivamente, hasta agotar los 21 caramelos; tendremos así por ejemplo el grupo:

BE………..B (21 elementos)

Otro ejemplo posible es : CB……….A

La cantidad de posibilidades para esta acción es obviamente (designamos con CR a las combinaciones con repetición):

$$CR_{21}^{5} = C_{21}^{25} = \underline{\mathbf{12650}} \text{ ,}$$

habiendo aplicado la conocida fórmula para las combinaciones ordinarias. En cada una de esas combinaciones con repetición, tenemos:

a = cantidad de veces en que aparece el elemento A (o sea la cantidad de caramelos que recibió el niño A)
b = cantidad para B
c = cantidad para C
d = cantidad para D
e = cantidad para E

Los grupos mencionados forman combinaciones y no arreglos pues el orden en que aparecen los elementos no interesa ya que contamos los caramelos recibidos en total por cada niño. Si el niño N no recibe ningún caramelo, su número n será 0. Pero habrá por supuesto números mayores que 9 y por lo tanto las posibilidades calculadas incluyen casos que no corresponden a boletos.

<u>Paso 2</u> :
En la cantidad calculada de 12650 posibilidades, tenemos casos en que por lo menos algún a,b,c,d,e supera a 9. Debemos restar esos casos.
Supongamos por ejemplo que al niño A ya le dimos 10 caramelos en las 10 primeras acciones (ya vimos que el orden de las entregas no interesa); quedan 11 caramelos para repartir, o sea que el reparto siguiente debe hacerse en tal forma que a + b + c + d + e = 11. Por la mima consideración que la realizada en el paso 1, tendremos las posibilidades:

$$CR_{11}^{5} = C_{11}^{15} = 1365$$

Repitiendo este cálculo para cada uno de los niños, la cantidad total de posibilidades a restar por este concepto será: 5x1365 = **<u>6825</u>** .

<u>Paso 3</u> :
En el cálculo que realizamos en el paso 2, hemos evaluado 2 veces los casos en que dos variables son simultáneamente 10 (no puede haber más de 2 variables que sean simultáneamente 10 ya que las cifras sumarían por lo menos 30, lo cual es absurdo ya que sólo tenemos 21 caramelos; (tampoco puede haber 2 variables que sean simultáneamente 11). Debemos calcular esos casos y compensar sustrayéndolos de los 6825 casos calculados..
Suponiendo por ejemplo que las 2 variables sean a y b, si ya les dimos 10 caramelos a A y 10 a B, queda 1 solo caramelo para entregar, o sea que el reparto siguiente nos daría a + b + c + d + e = 1, lo cual produce la cantidad de casos $CR_{1}^{5} = C_{1}^{5} = 5$. Como las dos variables se pueden elegir entre las 5 de C_{2}^{5} maneras, la cantidad total de casos "intrusos" será $5C_{2}^{5}$ = 50. De modo que los casos a quitar de los calculados en el paso 1 serán en realidad:

6825 – 50 = **<u>6775</u>**

Cálculo final :

La cantidad de boletos cuyos dígitos suman 21 es entonces:

$$12650 - 6775 = \boxed{\mathbf{5875}}$$

Observrvación sobre el paso 2 :

Otra forma de llegar al número 1365 obtenido en el paso 2 es la siguiente:

- Si hacemos a = 10 y lo dejamos fijo, repartimos los 11 caramelos restantes entre los otros 4 niños : b + c + d +e = 11, lo cual nos da CR_{11}^{4} casos
- Haciendo a = 11, obtenemos CR_{10}^{4} casos
- Haciendo a = 12, obtenemos CR_{9}^{4} casos
- Así sucesivamente, hasta a = 21, con CR_{0}^{4} casos

Debemos entonces restar esta cantidad de casos:

$$CR_{11}^{4} + CR_{10}^{4} + CR_{9}^{4} + ... + CR_{0}^{4} \ ,$$

o sea, en combinaciones comunes:

$$C_{11}^{14} + C_{10}^{13} + C_{9}^{12} + ... + C_{0}^{3}$$

Haciendo el cálculo de esa suma, obtenemos 1365, como en el razonamiento realizado en el paso 2, donde evaluamos C_{11}^{15}

Resolución empleando "MATLAB".

Tratándose de un problema que manipula exclusivamente números enteros, resulta muy práctico y rápido emplear esa herramienta y plantear, en el lenguaje de Matlab, este programa; que nos da el resultado para el caso particular expuesto, o sea n=5, p = 21:

```
h=0;
for a=0:9
 for b=0:9
  for c=0:9
```

```
   for d=0:9
    for e=0:9
     s=a+b+c+d+e;
     if s==21
       h=h+1;
     end
    end
   end
  end
 end
end
```

Resultado : h = 5875

Generalización:
Planteamos ahora el problema general, para n =5 pero s = p cualquiera entre 0 y 45, incluyendo 0 y 45. El resultado es una función f(p), que obviamente cumple f(21)=5875 (resultado hallado para los “boletos de la suerte”.).
La forma más práctica para hallar los valores de f(p) para p =0,1,2,...45 es emplear el siguiente programa de MATLAB:

```
for p=0:45
 h(p+1,1:2)=[p 0];
end
for a=0:9
 for b=0:9
  for c=0:9
   for d=0:9
    for e=0:9
     p=a+b+c+d+e;
     h(p+1,2)=h(p+1,2)+1
    end
   end
```

```
  end
 end
end
h
```

Resultado de la corrida:

Suma p	f(p)	Suma p	f(p)	Suma p	f(p)
0	1	16	3795	32	2205
1	5	17	4335	33	1745
2	15	18	4840	34	1340
3	35	19	5280	35	996
4	70	20	5631	36	715
5	126	21	5875	37	495
6	210	22	6000	38	330
7	330	23	6000	39	210
8	495	24	5875	40	126
9	715	25	5631	41	70
10	996	26	5280	42	35
11	1340	27	4840	43	15
12	1745	28	4335	44	5
13	2205	29	3795	45	1
14	2710	30	3246		
15	3246	31	2710		

La distribución de los valores de f(p) es simétrica respecto al punto medio del intervalo (21,22) pues se observa que f(22-i) = f(23+i) con i = 1,2,3,....,22. Esta propiedad de f(p) puede demostrarse analizando el problema con las expresiones mencionadas para f(p).Se verifica también que f(21) = 5875.

Problema 1.15 (*)
Este problema es una especie de "juego" entre dos personas, que llamaremos A y B, que conslste en que A "adivine" un número o un objeto pensado por B.
Se trata del siguiente juego: el jugador **A** propone al jugador **B** la consideración de n objetos, que pueden ser cualesquiera: objetos de cualquier clase, números de cualquier naturaleza, etc.. Para que el juego resulte menos engorroso y más práctico y evitar el tener que presentar a **B** los n objetos, se aconseja emplear los n primeros naturales 1,2,3,......,n, que todo el mundo conoce y recuerda fácilmente. El jugador B debe elegir uno de estos números y memorizarlo. **A** le propone luego p planillas que contienen cada una un conjunto de números seleccionados dentro de los n considerados.
Para cada planilla, B debe informar si el elemento memorizado por él pertenece o no a esa planilla (Sí o No). Su respuesta completa para las p planillas debe permitir a A obtener el número pensado por B.
El problema consiste en diseñar las planillas para emplearlas para un determinado n. Para fijar ideas, hacer el diseño en los casos p=3, p=4, p=5, p=6

Solución
La respuesta completa de B para las p planillas constituye un arreglo con repetición de los elementos S y N tomados de p en p. La cantidad de posibles respuestas es entonces AR_p^2 , o sea 2^p. Queremos establecer una correspondencia biunívoca entre esos arreglos y los n elementos considerados; para eso, debe cumplirse $2^p = n$, de modo que n debe ser una potencia de 2 y p debe ser el exponente de esa potencia.
Con la respuesta de **B**, **A** debe "adivinar" el elemento elegido por **B**. es conveniente eliminar las respuestas SS.......S (**B** consideraría que el acierto de **A** es trivial) y NN........N (no tiene sentido que A haya propuesto un número inexistente en

toda planilla). La cantidad de arreglos es entonces AR_p^2 - 2 y la condición del juego será AR_p^2 - 2 = n .

Ejemplos:

Estudiaremos algunos casos particulares. El caso p = 2 es trivial y para p > 6, el juego es demasiado engorroso por dificultarse la localización del arreglo correspondiente a la respuesta de **B**. Consideraremos entonces los casos p=3, p=4, p=5, p=6.

❶ **p = 3** $\Rightarrow$ n = 6 Los números son 1, 2, 3, 4, 5, 6

Formamos los $AR_3^2 - 2$, que son en total 6 y los asociamos a los 6 números:

SSN $\leftrightarrow$ 1
SNS $\leftrightarrow$ 2
SNN $\leftrightarrow$ 3
NSS $\leftrightarrow$ 4
NNS $\leftrightarrow$ 5
NSN $\leftrightarrow$ 6

Suponiendo que el orden de las respuestas de **B** es el de las planillas, los contenidos de esas planillas serán:

Planilla 1	Planilla 2	Planilla3
1	1	1
2	4	4
3	6	5

Si, por ejemplo, **B** dice (No, Sí, Sí), el número que memorizó es NSS, o sea 4., de acuerdo a nuestra correspondencia anterior.

Cada planilla contiene 3 números y se escriben en total 9 números.

❷ p= 4 $\Rightarrow$ n = 14 . Los números son 1, 2, 3, ... , 14
Formamos los $AR_4^2 - 2$, que son en total 14 y los asociamos a los 14 números:

SSSN $\leftrightarrow$ 1
SSNS $\leftrightarrow$ 2
SNSS $\leftrightarrow$ 3
NSSS $\leftrightarrow$ 4
SSNN $\leftrightarrow$ 5
SNSN $\leftrightarrow$ 6
SNNS $\leftrightarrow$ 7
NNSS $\leftrightarrow$ 8
NSNS $\leftrightarrow$ 9
NSSN $\leftrightarrow$ 10
NNNS $\leftrightarrow$ 11
NNSN $\leftrightarrow$ 12
NSNN $\leftrightarrow$ 13
SNNN $\leftrightarrow$ 14

Las planillas son:

Planilla 1	Planilla 2	Planilla 3	Planilla 4
1	1	1	2
2	2	3	3
3	4	4	4
5	5	6	7
6	9	8	8
7	10	10	9
14	13	13	11

Si por ejemplo, B dice NSSN, el número que memorizó es 10.

Cada planilla contiene 7 números y se escriben en total 28 números.

❸ <u>p = 5</u> $\Rightarrow$ n = 30   Los números son 1, 2, 3, ..., 30
Formamos los $AR_5^2 - 2$, que son en total 30, por ejemplo en este orden:

SNNNN $\leftrightarrow$ 1	NNSSN $\leftrightarrow$ 11	SSNNS $\leftrightarrow$ 21
NSNNN $\leftrightarrow$ 2	NNNSS $\leftrightarrow$ 12	SSSNN $\leftrightarrow$ 22
NNSNN $\leftrightarrow$ 3	NSNSN $\leftrightarrow$ 13	SNSNS $\leftrightarrow$ 23
NNNSN $\leftrightarrow$ 4	NNSNS $\leftrightarrow$ 14	SSNSN $\leftrightarrow$ 24
NNNNS $\leftrightarrow$ 5	NSNNS $\leftrightarrow$ 15	SNSSN $\leftrightarrow$ 25
SNSNN $\leftrightarrow$ 6	NSNSS $\leftrightarrow$ 16	SSSSN $\leftrightarrow$ 26
SNNSN $\leftrightarrow$ 7	NSSNS $\leftrightarrow$ 17	SSSNS $\leftrightarrow$ 27
SNNNS $\leftrightarrow$ 8	NSSSN $\leftrightarrow$ 18	SSNSS $\leftrightarrow$ 28
SSNNN $\leftrightarrow$ 9	NNSSS $\leftrightarrow$ 19	SNSSS $\leftrightarrow$ 29
NSSNN $\leftrightarrow$ 10	SNNSS $\leftrightarrow$ 20	NSSSS $\leftrightarrow$ 30

De acuerdo a esta correspondencia, las planillas son.

Planilla 1	Planilla 2	Planilla 3	Planilla 4	Planilla 5
1	2	3	4	5
6	9	6	7	8
7	10	10	11	12
8	13	11	12	14
9	15	14	13	15
20	16	17	16	16
21	17	18	18	17
22	18	19	19	19
23	21	22	20	20
24	22	23	24	21
25	24	25	25	23
26	26	26	26	27
27	27	27	28	28
28	28	29	29	29
29	30	30	30	30

Cada planilla contiene 15 números y se escriben en total 75 números.

❹ <u>p = 6</u> $\Rightarrow$ n = 62
Los números son 1, 2, 3, ..., 62
Cada planilla contiene 31 números y se escriben en total 186 números.
Dejamos al lector el diseño de las planillas en este caso.

<u>En general</u> :
Cada planilla contiene $\frac{n}{2}$ números y se escriben en total $\frac{pn}{2}$ números.

La correspondencia entre los arreglos y los números es arbitraria; basta que se establezca una biyección entre los arreglos (cuya cantidad es AR_p^2) y los números (cuya cantidad es n = $2^p - 2$).

Observación importante :

Hay 2 maneras de preparar el juego para un p dado, del cual se deduce n = $AR_p^2 - 2$ = 2^p - 2:

1) Escribir los ($AR_p^2 - 2$) arreglos, (no se escriben los arreglos SSS.....S y NN.......:N), en cualquier orden, y luego asociarlos a los números 1,2,3,........,n . La cantidad de maneras de ordenar esos arreglos es P_n = n! Como n! > n , tenemos muchas más maneras que números n, de modo que los $\frac{n}{2}$ números que aparecen en cada planilla tendrán n! maneras de hacerlo.

2) Llenar primero las p planillas con $\frac{n}{2}$ números elegidos entre los n, cuidando tres condiciones fundamentales :

a) Cuidar que no haya planillas coincidentes.

b) Cuidar que cada número aparezca por lo menos en una planilla.

c) Cuidar que ningún número aparezca en todas las planillas.

Leyendo luego las planillas, podemos obtener la biyección entre los números y los arreglos.

A medida que n aumenta, ambos métodos se vuelven cada vez más engorrosos. Si se procede tomando para p valores naturales consecutivos, se puede facilitar la formación de los arreglos procediendo en forma inductiva: escritos todos los AR_{p-1}^2 , los AR_p^2 se obtienen inmediatamente agregando a

cada arreglo de orden (p-1), al final del mismo, una S o una N En la nueva lista están todos los arreglos de orden p, como se ve fácilmente: imaginando cualquier arreglo de orden p, si le retiramos la última letra nos queda un arreglo de orden (p-1) , que debe estar en la lista original ya que estaban todos.
Obtenidos así todos los arreglos de orden p, suprimimos luego los dos arreglos SSS.....S y NNN....N. De modo que al proceder con p consecutivos, escribir todos los arreglos resulta muy simple y por lo tanto se aconseja proceder mediante el método 1.

Problema 1.16 Números casi-perfectos (**)

Un número natural n se llama perfecto cuando la suma de todos sus divisores propios (o sea incluyendo el divisor 1 pero excluyendo el divisor n) coincide con n. Así, por ejemplo 6 es perfecto ya que 1 + 2 + 3 = 6. Si esa suma resulta ser (n – 1) en vez de n, el número se llama casi-perfecto. Así por ejemplo 8 es casi-perfecto ya que 1 + 2 + 4 = 8 – 1.. Resulta muy simple probar que toda potencia de 2 es un número casi-perfecto.
El problema que aquí se propone es demostrar el recíproco de esa proposición, o sea: "*todo número casi-perfecto es una potencia de 2*".

Solución

Se trata de determinar que la condición necesaria y suficiente para que un número entero sea casi-perfecto es que ese número sea una potencia de 2.
Como dicho en el enunciado, la condición suficiente es muy simple de probar. En efecto, si n = 2^m, sus divisores propios son 1,2,3, ………, 2^{m-1}, los cuales están en progresión geométrica de razón 2 y tienen por suma $2^m - 1 = n - 1$, de modo que toda potencia de 2 es un número cas-perfecto.

Pero el recíproco, o sea la condición necesaria, es un problema mucho más complejo. He dedicado mucho tiempo al análisis de ese recíproco y, hasta que se logre demostrarlo, no es más que una conjetura (aunque confieso estar íntimamente convencido acerca de la verdad de esa conjetura). He consultado a numerosos especialistas de la teoría de números y también mucha literatura acerca de de esa teoría , pero, lamentablemente, no he logrado obtener una confirmación de esa conjetura.
Se trata pues de un problema "abierto". A pesar de haber manifestado en mi prefacio que no plantearía problemas abiertos, he querido introducir éste por considerarlo muy simple en su enunciado y para tentar al lector experimentado a reflexionar sobre el mismo. Yo he producido algún avance en la verificación de esa conjetura (ver mi libro "Viajando por rincones matemáticos", pág. 146), pero me ha quedado demostrar que **ningún número que, admitiendo más de dos divisores primos , es un cuadrado perfecto o es doble de un cuadrado perfecto, es casi-perfecto** (ver análisis en el libro citado). He demostrado que todo número que no pertenece a esa categoría no es casi-perfecto.
Invito al lector a investigar pues una demostración completa de la conjetura (¡llegando a buen puerto, quizás sería merecedor de la medalla Fields!).

<u>Problema 1.17</u>

Sea $\nu(n)$ el número de factores primos distintos en la descomposición del natural n. Por ejemplo $\nu(2) = 1$, $\nu(8) = \nu(2^3) = 1$, $\nu(15) = \nu(3x5) = 2$, $\nu(28) = \nu(2^2x7) = 2$.

Demostrar que $\displaystyle lím_{n\to+\infty} \frac{\nu(n)}{n} = 0$

Solución

Sea n = $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\chi}$..........$m^{\mu}$, donde a,b,c,……,m son todos sus divisores primos distintos, cuya cantidad es $\nu(n)$. Tenemos:

$n \geq abc.....m \Rightarrow$ Ln ≥ La + Lb + Lc + …..+ Lm,

donde la cantidad de sumandos es $\nu(n)$. Siendo todos los naturales a,b,c,…..,m ≥ 2, resulta Ln ≥ ν(n)L2 . Entonces:

$$\nu(n) \leq \frac{Ln}{L2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\nu(n)}{n} \leq \frac{Ln}{n}.\frac{1}{L2}$$

Pero, para n→ +∞ , es sabido que Ln es un infinito de menor orden que n , de modo que el segundo miembro tiende a 0 y entonces $\lim_{n\to+\infty}\frac{\nu(n)}{n} \leq 0$. Siendo $\frac{\nu(n)}{n}$ positivo, resulta en definitiva:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{\nu(n)}{n} = 0}$$

<u>Problema 1.18</u> (*)

Demostrar que para todo real x ≥ 2, el producto de los primos ≤ x es siempre < 4^{x-1} .

Solución

Sea p un primo cualquiera ≤ x. Siendo q el mayor primo ≤ x, es evidente que:

$$\prod_{p\leq x} p = \prod_{p\leq q} p \quad \text{y que} \quad 4^{q-1} \leq 4^{x-1}$$

Para probar nuestra tesis, será suficiente entonces suficiente demostrar que:

$$\prod_{p\leq q} p < 4^{q-1}$$

El único primo par es 2; si q = 2 la desigualdad anterior se cumple ya que se escribe 2<4. Bastará pues considerar todos los demás valores posibles de q, que son impares o sea de la forma $q = 2m + 1$, con $m \geq 1$.

Procederemos por inducción completa. Supongamos que la propiedad $\prod_{p \leq n} p < 4^{n-1}$ se cumple para los siguientes valores de n (para n = 2 ya ha sido verificada)::

2 3 4 ……………………….. 2m-1 2m (m≥1) ,

o sea todos los anteriores a 2m+1 . Demostraremos que entonces la propiedad se cumple para n = 2m+1, supuesto primo. Siendo $m+1 \leq 2m$ ya que $m \geq 1$, podemos escribir:

$$\prod_{p \leq 2m+1} p = \prod_{p \leq m+1} p \cdot \prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p$$

Por la hipótesis de la inducción, $\prod_{p \leq m+1} p < 4^{m+1}$; entonces:

$$\prod_{p \leq 2m+1} p < 4^{m+1} \cdot \prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \qquad (1)$$

Pero, por otra parte, $\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \leq C_m^{2m+1}$. En efecto, siendo $C_m^{2m+1} = \dfrac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}$, observamos que los primos considerados aparecen como factores en el numerador pero no aparecen en el denominador. Siendo el número combinatorio un número entero, resultará que ese combinatorio es un múltiplo de $\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p$, de lo que se deduce que $C_m^{2m+1} \geq \prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p$, como decíamos.

Recordemos también que:

$$C_0^{2m+1} + C_1^{2m+1} + C_2^{2m+1} + \ldots\ldots + C_{2m+1}^{2m+1} = 2^{2m+1}$$

En esa suma de combinatorios, aparecen el número C_m^{2m+1} y su complementario C_{m+1}^{2m+1}, de modo que:

$$C_m^{2m+1} + C_{m+1}^{2m+1} < 2^{2m+1}$$

Siendo iguales esos combinatorios (por ser combinaciones complementarias), al dividir por 2 ambos miembros, nos queda:

$$C_m^{2m+1} < 2^{2m}$$

Volviendo a la desigualdad (1), obtenemos:

$$\prod_{p \le 2m+1} p < 4^{m+1}.\ C_m^{2m+1} < 4^{m+1}.2^{2m} = 4^{2m+1}$$

y queda probada la propiedad para el primo q = 2m+1. Esto completa nuestra demostración.

Problema 1.19

Demostrar qu el número n! contiene al factor primo p exactamente $\sum_{k=1}^{+\infty} E(\frac{n}{p^k})$ veces. (Legendre)

E(α) significa "parte entera de α".

Solución

Observemos que los términos de la sumatoria para los cuales p^a ya superó a n son todos nulos, de modo que la sumatoria tendrá un cantidad finita de términos no nulos.(los primeros, hasta que $p^k > n$).

El número n! = 1.2.3…….n contiene exactamente $E(\frac{n}{p})$ factores divisibles por el primo p. Entre esos factores, la cantidad de ellos que son divisibles por p^2 será $E(\frac{n}{p^2})$, y así sucesivamente. Obtenemos así la sumatoria del enunciado.

Problema 1.20 **(*)**

Probar que para todo n natural: $C_n^{2n} \geq \dfrac{4^n}{2n}$

Solución

Consideremos todos los combinatorios C_i^{2n} , o sea:

$$C_0^{2n} \quad C_1^{2n} \quad C_2^{2n} \;.........C_{n-1}^{2n} \quad C_n^{2n} \quad C_{n+1}^{2n}...........C_{2n}^{2n}$$

siendo C_n^{2n} el que ocupa el lugar central. Por la propiedad de las combinaciones complementarias, se sabe que los combinatorios simétricos respecto al central son iguales; además, en total, los combinatorios escritos son 2n+1 y se sabe que suman 2^{2n}. También se sabe que el mayor de todos es el central C_n^{2n} .

Consideremos entonces los siguientes números:

$$C_0^{2n} + C_{2n}^{2n},\; C_1^{2n},\; C_2^{2n} \;........., C_{2n-1}^{2n} \quad , \qquad (1)$$

cuya cantidad es 2n y cuya suma es obviamente 2^{2n} .

Si n=1, esos números son:

$$C_0^2 + C_2^2, C_1^2 \qquad \text{y son iguales (valen 2)}$$

Si n>1, no son todos iguales ; sabemos que C_n^{2n} es mayor que cualquiera de la lista (1) a partir del segundo, pero también es mayor que el primero: $C_n^{2n} > C_0^{2n} + C_{2n}^{2n}$ pues el segundo miembro vale 2 y el primer miembro C_n^{2n} es obviamente mayor que 2.

Volviendo a la lista (1), que contiene 2n elementos todos ≤ que C_n^{2n} (incluimos el signo de = para tener en cuenta el caso n=1), y que suman 2^{2n}, resulta:

$$2n.\; C_n^{2n} \geq 2^{2n} = 4^n \quad \Rightarrow \quad C_n^{2n} \geq \frac{4^n}{2n} \;,$$

lo cual completa nuestra demostración.

Problema 1,21
Probar que hay infinitos primos de la forma $4m + 3$, o sea iguales a 3 en el módulo 4.

Solución
Emplearemos un razonamiento similar al aplicado en la célebre demostración de Euclides acerca de la infinitud de los primos.
Supongamos que la cantidad de primos de la forma $4m + 3$ sea finita; llamando p_k al mayor de ellos, esos primos serán:

$$3, 7, 11, 19, \ldots\ldots\ldots\ldots, p_k.$$

Formamos el número:

$$M_k = 3.5.7\ldots\ldots..p_k \quad ,$$

donde $3,5,7,\ldots\ldots, p_k$ son todos (excepto el 2) los primos hasta el p_k . Consideramos el número:

$$N_k = 4M_k - 1 = 4(M_k -1) + 3 \equiv 3 \text{ (módulo 4)}$$

Descomponemos N_k en el producto de potencias de sus divisores primos, si todos esos factores fueran no congruentes con 3 (módulo 4), serían congruentes con 0, 1, o 2 ; entonces su producto N_k no podría ser congruente con 3. De modo que alguno de los factores p^α que componen a N_k debe ser $\equiv 3$, o sea que algún divisor primo p de N_k debe ser de la forma $4m+3$. Pero ese p no puede ser ninguno de los $3,7,11,19,\ldots,$ p_k, ya que la división del número:

$$N_k = 4.3.5.7 \ldots\ldots.p_k - 1$$

por cualquiera de ellos no da resto 0. Ese primo p debe entonces ser mayor que $p_k \Rightarrow$ contradicción.
Observación: Siendo impares todos los primos (salvo el 2 naturalmente), los demás primos (o sea los que no son de la categoría $4m+3$) son de la clase $4m + 1$. Se demuestra que ésos también son infinitos. Esta clasificación de los primos

está ligada con un famoso problema de Fermat acerca de la posibilidad de representar un número natural como suma de dos cuadrados de enteros.

Problema 1.22 **(*)**
¿Existe alguna potencia entera de 2 tal que sus dígitos pueden ser rearreglados para formar otra potencia de 2? (No se admite el cero en el primer dígito, por ejemplo 016 no es admitido)

Solución :
Recordatorio :
Siendo N un entero cualquiera representado en escritura decimal y $\sigma(N)$ la suma de sus dígitos , siempre $N \equiv \sigma(N)$ en módulo 9; en efecto, por ejemplo si $N = abcd_{10}$, tenemos:

$$N = a.10^3 + b.10^2 + c.10 + d$$

Puesto que $10 \equiv 1$ (mód.9) , nos queda:

$$N \equiv a.1^3 + b.1^2 + c.1 + d = a+b+c+d$$

Paso 1 :
Sabemos que en la sucesión de números naturales, dos consecutivos A y B equivalentes en módulo m se presentan separados por períodos de m, o sea que B = A+m ya que los restos de la división por m sólo pueden ser 1,2,….,m-1. En particular si m = 9, los restos son 0,1,2,…..,8, pero si los números considerados son sólo potencias de 2, los restos no pueden ser 0,3,6 (esos restos son imposibles ya que 2^α no es múltiplo de 3). Sólo nos queda:

$$2^\alpha \equiv 1,2,4,5,7,8$$

De modo que el período es de 6 elementos.
Paso 2 :
Estamos considerando dos potencias A y B de 2 que tengan los mismos dígitos, de modos que $\sigma(A)$ y $\sigma(B)$ son iguales; pero, aplicando lo visto en el paso 1, tendremos:

$$\sigma(A) = \sigma(B) \Rightarrow \sigma(A) \equiv \sigma(B) \text{ (mód.9)} \Rightarrow A \equiv B \text{ (mód.9)}$$

Entonces entre A y B hay una separación mínima de 6, lo cual nos dice que entre los exponentes hay una separación mínima de 6, de modo que para pasar de A a B, hay que multiplicar A por 2^6, por lo menos; siendo $2^6 = 64$, tendremos: $B \geq 64A$, lo cual imposibilita que A y B tengan la misma cantidad de dígitos. Hemos llegado entonces a una contradicción y por lo tanto la respuesta a la pregunta del problema es:

$$\boxed{\text{NO}}$$

Problema 1.23 (*)

Hallar todas los naturales a,b,n que cumplen:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{n}{a+b} \qquad ,$$

siendo obviamente $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a+b \neq 0$.

Solución

Observemos que debe ser $n \neq 0$ ya que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=0$ es imposible pues a y b son enteros positivos.

La ecuación propuesta es equivalente a : $(a+b)^2 = nab$. Poniendo $a+b = S$, $ab = p$, la ecuación es equivalente a:

$$S^2 = np \iff p=\frac{S^2}{p}$$

a y b son entonces las raíces de la ecuación

$x^2 - Sx + \frac{S^2}{n} = 0$, o sea : $\frac{S}{2}(1 \pm \sqrt{n^2-4n})$ (1)

Siendo a, b enteros , $n^2 - 4n$ deberá ser un cuadrado perfecto. Pero, observando que $n^2 - 4n = (n-2)^2 - 4$, se deberá cumplir : $(n-2)^2 - 4 = q^2$, donde $q \in N$, o también:

$$\underline{(n-2)^2 - q^2 = 4} \qquad (2)$$

Estamos buscando pues dos números enteros cuyos cuadrados difieren en 4; el mayor de ellos, o sea (n-2), será por lo menos (q+1):

$$n-2 \geq q+1 \;\Rightarrow (n-2)^2 - q^2 \geq (q+1)^2 - q^2$$

o sea : $(n-2)^2 - q^2 \geq 2q + 1$, o también, usando la relación (2):

$$4 \geq 2q + 1$$

Por lo tanto el natural q sólo puede ser 0 o 10. Examinamos las dos posibilidades:

a) <u>q = 0</u> Aplicando (2) , tendremos $(n-2)^2 = 4 \;\Rightarrow\; n = 4$
En este caso resulta $n^2 - 4n = 0$ y las raíces expresadas en (1) serán iguales: $a = b = \dfrac{S}{2}$
Hemos hallado pues la solución a = b (cualquiera), n = 4.

b) <u>q = 1</u> Por (2) , obtenemos $(n-2)^2 = 5$, lo cual es imposible ya que 5 no es un cuadrado perfecto.

<u>Resumiendo:</u> Las únicas soluciones posibles son a = b (cualquiera) , n=4 .

<u>Problema 1.24</u>

Hallar el mayor entero positivo n tal que $n^3 + 100$ es divisible por n + 10.

<u>Solución</u>

Dividimos el polinomio $n^3 + 100$ por n + 10, obteniendo la identidad:

$$n^3 + 100 = (n+10)(n^2-10n+100) - 900,$$

de donde:

$$\frac{n^3+100}{n+10} = n^2 - 10n + 100 - \frac{900}{n+10}$$

Cuando n es un entero positivo, para que el número n^3+100 sea divisible por el número n+10, o sea que el primer miembro de nuestra igualdad sea un número entero, vemos que $\frac{900}{n+10}$ debe ser entero. Para eso, n+10 debe ser divisor de 900. El mayor divisor de 900 es 900, de modo que el mayor n+10 es 900. Se deduce:

$$\boxed{n_{máx.} = 890}$$

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

<u>Capítulo II.2</u> Soluciones para los problemas del capítulo I.2 (Álgebra y Análisis)

<u>Problema 2.1</u>

Mostrar que la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} L\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ es convergente y hallar su suma.

<u>Solución</u>

Paso 1: Verificamos las siguientes identidades, válidas para todo n natural:

$$(1+\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n+1})=1$$

$$(1-\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n+1})=1-\frac{2}{n(n+1)}$$

Paso 2: Observar que la serie dada es alternada:

n par $\Rightarrow$ $1+\frac{1}{n}>1$ $\Rightarrow$ $L\left(1+\frac{1}{n}\right)>0$

n impar $\Rightarrow$ $1-\frac{1}{n}<1$ $\Rightarrow$ $L\left(1-\frac{1}{n}\right)<0$,

de modo que los términos de la serie son alternadamente positivos y negativos: la serie es alternada.

Paso 3: Siendo u_n el término general de la serie, se cumple:

a) lím $u_n = 0$, lo cual es inmediato

b) $\forall n:$ $|u_n| \geq |u_{n+1}|$. En efecto:

- si n es par : $\left|u_n\right| = L\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$\left|u_{n+1}\right| = -L\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

de modo que:

$$\left|u_n\right| \geq \left|u_{n+1}\right| \Leftrightarrow \mathrm{L}\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq -\mathrm{L}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{L}\left[(1+\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n+1})\right] \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{L}1 \geq 0$$

La última equivalencia es una aplicación del paso 1 y se cumple estrictamente L1 = 0.

- si n es impar; $\left|u_n\right| = -L\left(1-\frac{1}{n}\right)$

$$\left|u_{n+1}\right| = L\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

de modo que:

$$\left|u_n\right| \geq \left|u_{n+1}\right| \Leftrightarrow -\mathrm{L}\left(1-\frac{1}{n}\right) \geq \mathrm{L}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{L}\left[(1-\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n+1})\right] \leq 0 \Leftrightarrow$$

$L\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right) \leq 0$ (cumpliéndose estrictamente la desigualdad <)

La última equivalencia es una aplicación del paso 1.

Cumpliéndose estrictamente las condiciones del criterio de Leibniz relativo a las series alternadas, nuestra serie resulta convergente.

Suma de la serie

- Si n es par, la reducida S_n de la serie es:

$$L\left[(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})..........(1+\frac{1}{n-2})(1-\frac{1}{n-1})(1+\frac{1}{n})\right]$$

La cantidad de factores dentro del corchete es (n-1), pudiéndose agrupar en parejas de factores consecutivos, excepto el último factor. El producto de dos factores consecutivos (primero con segundo, tercero con cuarto, etc.) es 1, de acuerdo a lo visto en el paso1. Nos queda entonces:

$$S_n = L(1+\frac{1}{n}) \to 0$$

- Si n es impar, el número de factores (n-1) es par y por lo tanto la asociación en parejas no deja ninguna excepción . Resulta pues:

$$S_n = L(1.1.1.....1) = L1 = 0 \to 0$$

Entonces, la suma de nuestra serie es

$$\boxed{S = 0}$$

Problema 2.2 Constante de Euler(*)

Demostrar que la sucesión $H_n - L(n+1)$, siendo H_n la reducida enésima de la serie armónica (con n =1,2,3,........) es convergente. Su límite se conoce como **C,** que es la "constante de Euler". Tomando n suficientemente grande, se puede encontrar que C = 0,577......, siendo exactas esas primeras cifras decimales, pero determinar si C es racional o irracional es un problema "abierto" en la Matemática actual.

Demostrar que también $\lim_{n\to+\infty} (H_n - Ln) = C$.

Aplicación Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n} - L(1+\frac{1}{n})\right]$

Solución

Consideremos la integral $I = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = L(n+1)$. Las sumas siguientes:

$$s_n = \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n+1} = H_n - 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} = H_n$$

son, respectivamente, una suma inferior y una superior entre las cuales se ubica la integral I, de modo que:

$$s_n < I < S_n$$

Llamando $a_n = H_n - L(n+1)$ al término general de nuestra sucesión, esas desigualdades pueden escribirse en esta forma:

$$0 < a_n < 1 - \frac{1}{n+1} \quad ,$$

lo cual nos muestra que la sucesión a_n es positiva; pero además es fácil ver que es monótona creciente: en efecto,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - L\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(1 - L(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}\right)$$

$\Rightarrow a_{n+1} - a_n > 0$ pues $(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} < e$. Resulta entonces que a_n es monótona creciente y acotada superiormente, por lo tanto convergente; haciendo $n \to +\infty$:

$$0 < \text{lím } a_n \leq 1$$

Ese límite se define como C, que se denomina "constante de Euler":

$$\boxed{C = \text{lím}[H_n - L(n+1)]}$$

Tomando n suficientemente grande, el cálculo numérico permite hallar las primeras cifras de C.   C = 0,577……..
En el estado actual de la Matemática, no se ha determinado si C es racional o irracional.
Es fácil ver que también lím(H_n – Ln) = C . En efecto:

$$H_n - Ln = H_n - L(n+1) + L(n+1) - Ln = a_n - L\frac{n+1}{n} \to C\ ,$$

ya que $\frac{n+1}{n} \to 1$.

De este resultado, se deduce que, para n → +∞, $H_n \sim Ln$; en efecto: $\frac{H_n}{Ln} = \frac{a_n + L(n+1)}{Ln} = \frac{a_n}{Ln} + \frac{L(n+1)}{Ln} \to 1$, ya que el primer sumando tiende a 0 ($a_n \to C$). Esta equivalencia nos muestra que las reducidas de la serie armónica se comportan asintóticamente (para valores "grandes" de n) como Ln. Esto no sólo confirma la divergencia de la serie armónica, sino que también da una idea sobre la velocidad de crecimiento de su reducida.

Aplicación:

Analizando las reducidas S_n de la serie, podemos al mismo tiempo confirmar su convergencia y hallar su suma, Llamando u_n al término general de la serie, tenemos:

$$u_n = \frac{1}{n} - L(n+1) + Ln\ ,$$

de modo que $u_1 = 1 - L2:$

$$u_2 = \frac{1}{2} - L3 + L2$$

$$u_3 = \frac{1}{3} - L4 + L3$$

....

$$u_n = \frac{1}{n} - Ln + 1) + Ln$$

Sumando: $S_n = H_n - L(n+1) \to C$

Por lo tanto, la serie es convergente y su suma S es la constante de Euler:

$$\boxed{S = C}$$

Problema 2.3

Siendo x,y,z complejos, hallar todas las soluciones (x,y,z) del sistema:

$$\begin{cases} x + y = z \\ x^2 + y^2 = z \\ x^3 + y^3 = z \end{cases}$$

Solución

Este problema es bien simple, pero nos ha parecido instructivo proponerlo para mostrar la conveniencia de respetar la simetría que presenta respecto a las incógnitas x,y

En función de z, ya tenemos la suma de las incógnitas x,y. Aprovechando la mencionada simetría, escribimos la segunda y la tercera ecuaciones para hacer aparecer la suma y el producto de x,y. Esas ecuaciones pueden escribirse en esta forma::

$$\begin{cases}(x+y)^2 - 2xy = z \\ (x+y)^3 - 3xy(x+y) = z\end{cases}$$

De la primera de esas dos ecuaciones, obtenemos::

$$xy = \frac{1}{2}(z^2 - z)$$

y reemplazando en la segunda:

$z^3 - \frac{3}{2}(z^2 - z)z = z \quad \Leftrightarrow \quad z^3 - 3z^2 - 2z = 0$, cuyas raíces son z=0, z=1, z=2.. Para x, y tenemos

$$\begin{cases}x + y = z \\ xy = \frac{1}{2}(z^2 - z)\end{cases}$$

x,y son las raíces de la ecuación $u^2 - Su + p = 0$, siendo S la suma de esas raíces y p su producto; reemplazando S y p, queda la ecuación $2u^2 - 2zu + (z^2 - z) = 0$, cuyas soluciones son $\dfrac{z \pm \sqrt{2z - z^2}}{2}$

para z = 0 . soluciones (0,0) $\Rightarrow$ (x,y) = (0,0)
para z = 1 : soluciones (1,0) $\Rightarrow$ (x,y) = (1,0) (x,y) = (0,1)
para z = 2: soluciones (1,1) $\Rightarrow$ (x,y) = (1,1)
El sistema tiene entonces 4 soluciones:

$$\boxed{\begin{matrix}x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0\end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix}x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1\end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix}x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1\end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix}x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2\end{matrix}}$$

Problema 2.4

a, b, c son tres reales que satisfacen 9a + 11b + 29c = 0. Demostrar que la ecuación en $x \in R$: $ax^3 + bx + c = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo cerrado [0,2] .

Solución

Si $P(x) = ax^3 + bx + c$, tenemos:

$$P(0) = c$$
$$P(2) = 8a + 2b + c$$
$$P(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27}(a + 9b + 27c)$$

Entonces: P(0) + P(2) + 27P(1/3) = 9a + 11b + 20c = 0 .

Si alguno de los tres sumandos del primer miembro es 0, tenemos al menos una raíz de P(x) en [0,2]. Si ninguno es nulo, no pueden ser de igual signo ya que suman 0; entonces hay dos sumandos de signo contrario (dos positivos y dos negativos, o dos negativos y un positivo). Aplicando el teorema de Bolzano, puede asegurarse que habrá por lo menos una raíz en (0,2). Este resultado, unido al anterior, demuestra que hay por lo menos una raíz en [0,2].

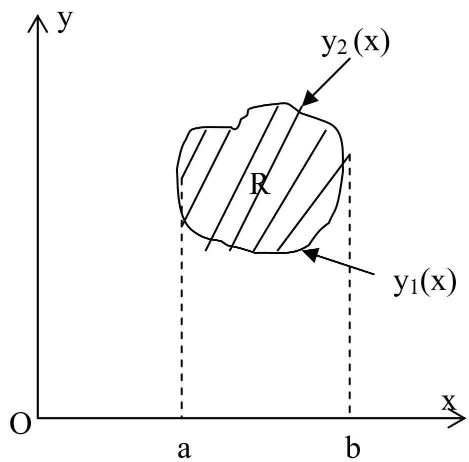
Problema 2.5 Primer teorema de Guldin

Demostrar que el volumen engendrado por una superficie plana al girar alrededor de un eje que no la atraviesa es igual al producto del área de esa superficie por la longitud de la circunferencia descripta por el centro de gravedad de esa superficie (supuesta homogénea).

Aplicar ese teorema para obtener los siguientes resultados:

a) Volumen del toro : El toro es el cuerpo engendrado por un círculo cuando gira alrededor de un eje de su plano, que no atraviesa al círculo. Se tomarán como datos el radio r del círculo y la distancia R de su centro al eje.
b) Baricentro de un semi-círculo de radio R .

Solución



Consideramos un recinto plano R, definido en su frontera mediante dos funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$, en un intervalo (a,b). Cuando R gira alrededor del eje Ox, el volumen que genera se calcula por la conocida fórmula:

$$V = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx$$

Por otra parte, el momento estático de R respecto a Ox es:

$$M = \iint_R y dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y(x)} y dy = \frac{1}{2} \int_a^b (y^2 - y_1^2) dx$$

Entonces V = 2πM. Pero se sabe que si G es el centro de gravedad de R, con ordenada Y_G :

$$M = Y_G \, \Omega \, ,$$

siendo Ω el área de R; resulta entonces:

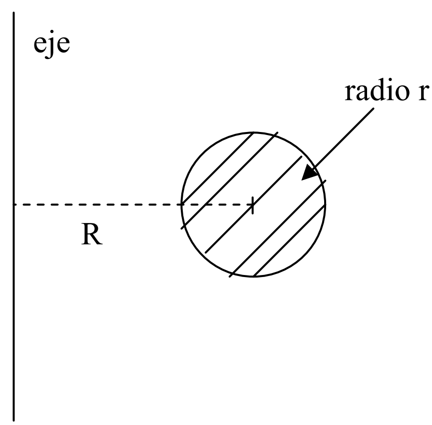
$$\boxed{V = 2\pi Y_G \,.\, \Omega}$$

Éste es el

<u>Primer teorema de Guldin</u> : El volumen engendrado por uaa superficie plana al girar alrededor de un eje que no la atraviesa es igual al producto del área de esa superficie por la longitud de la circunferencia descripta por el centro de gravedad de la superficie mencionada.

<u>Aplicaciones</u> :

a) <u>Volumen del toro</u>



El toro es el cuerpo engendrado por un círculo (radio r) que gira alrededor de un eje de su plano. Llamamos R a la distancia del centro del círculo al eje. El centro de gravedad del círculo es su centro y describe una circunferencia de longitud $2\pi R$; el área del círculo es πr^2. Por el primer teorema de Guldin, el volumen del toro es $V = 2\pi R.\pi r^2$, o sea:

$$\boxed{V = 2\pi^2 R r^2}$$

b) <u>Baricentro de un semi-círculo</u> :

Podemos aprovechar el primer teorema de Guldin para ubicar el baricentro de un semi-círculo de radio R. Si hacemos girar el semi-círculo alrededor de su diámetro, engendra una esfera, cuyo volumen es $\frac{4}{3}\pi R^3$. El baricentro del semi-círculo, situado sobre el eje de simetría del mismo a una distancia Y_G del diámetro, describe una circunferencia de longitud $2\pi Y_G$. Aplicando el teorema:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi Y_G.\frac{1}{2}\pi R^2 \Rightarrow \underline{Y_G = \frac{4}{3\pi}R}$$

<u>Problema 2.6</u> Segundo teorema de Guldin

Demostrar que el área de una curva plana al girar alrededor de un eje que no la atraviesa es igual al producto de la longitud de ese arco por la longitud de la circunferencia descripta por el centro de gravedad de eses arco (supuesto homogéneo).

Aplicar ese teorema para obtener los siguientes resultados:

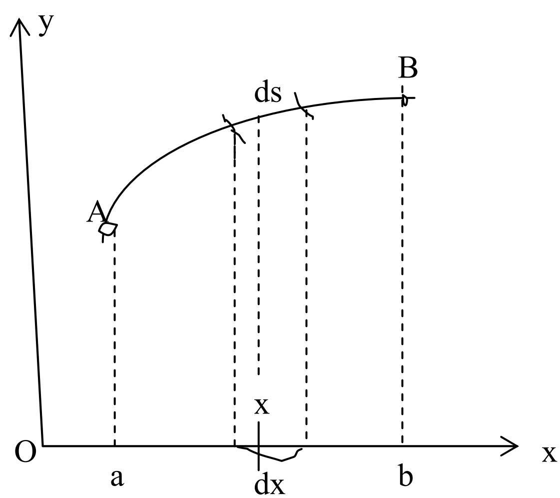
a) <u>Área lateral de un cono de revolución</u> : Se definirá el cono por el radio R de su base y la longitud g de su generatriz.

b) <u>Baricentro de una semi-circunferencia de radio R</u>

c) <u>Área lateral del toro</u> .

Solución

Consideramos esta figura;



Llamamos ***l*** a la longitud del arco AB y **ds** al elemento de arco que corresponde al intervalo dx. .Si el arco ds gira alrededor de Ox, engendra la superficie lateral de un tronco de cono de radios y e y, con generatriz ds. Aplicando la conocida fórmula para el área lateral de un tronco de cono, tenemos:

$$dS = \pi(y+y)ds = 2\pi yds$$

El área total engendrada por el arco AB es entonces

$$S = 2\pi \int_{arcoAB} yds$$

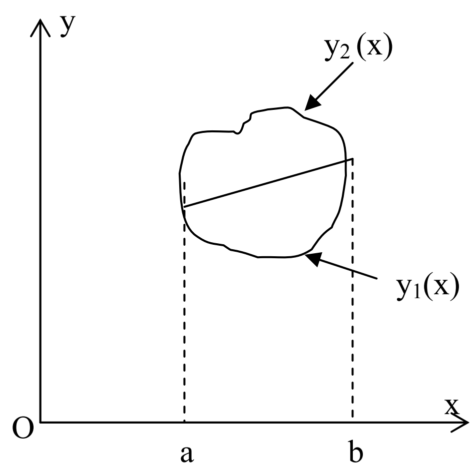
Pero $\int_{arcoAB} yds$ es el momento estático M del arco AB respecto al eje Ox, resultando entonces $S = 2\pi M$. Por otra parte, si G es el baricentro del arco AB y llamamos Y_G a su ordenada, se sabe que $M = Y_G\, l$. Obtenemos entonces:

$$\boxed{S = 2\pi Y_G . l}$$

Éste es el :

<u>Segundo teorema de Guldin</u> : El área engendrada por un arco de curva plana al girar alrededor de un eje que no lo atraviesa es igual al producto de la longitud de ese arco por la longitud de la circunferencia descripta por el centro de gravedad del arco.

<u>Generalización</u> :



Puede generalizarse el segundo teorema de Guldin al caso de una curva plana cerrada cualquiera que gira alrededor de un eje de su plano. La dividimos en dos arcos, de longitudes l_1 y l_2 respectivamente. Aplicamos a esos dos arcos el segundo teorema de Guldin:

$$S_1 = 2\pi Y_{G1} . l_1 \qquad S_2 = 2\pi Y_{G2} . l_2$$

El área total, o sea la engendrada por toda la curva, será:

$$S = S_1 + S_2 = 2\pi Y_{G1}.\, l_1 + 2\pi Y_{G2}.l_2$$

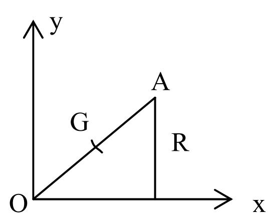
Pero si llamamos G al baricentro de la curva completa, sabemos que, por igualdad de los momentos estáticos, que $Y_{G1}.\, l_1 + Y_{G2}.l_2 = Y_G\, .l$, llamando l a la longitud total de la curva.. Entonces:

$$S = 2\pi Y_G\, l,$$

Resultando entonces válido el segundo teorema de Guldin para una curva cualquiera.

<u>Aplicaciones</u> :

a) <u>Verificación de la fórmula para el área lateral de un cono de revolución</u> :

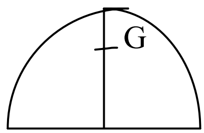


La superficie lateral del cono está engendrada por el giro del segmento OA alrededor de Ox.
El centro de gravedad de OA es su punto medio G, situado a la distancia R/2 de Ox.

Llamamos g a la longitud de OA (generatriz). Aplicando el segundo teorema de Guldin, el área generada por la rotación de OA es:

$$S = 2\pi(R/2).g \ \ , \ \text{o sea:} \qquad \underline{S = \pi R g}$$

b) <u>Baricentro de una semi-circunferencia</u> :



Al girar alrededor de su diámetro, la se circunferencia, de radio R, engendra ur superficie esférica de área $4\pi R^2$. Aplic el segundo teorema de Guldin, llamanc a la distancia del baricentro G al eje de rotación:

$$4\pi R^2 = 2\pi Y_G . \pi R$$

Se deduce:

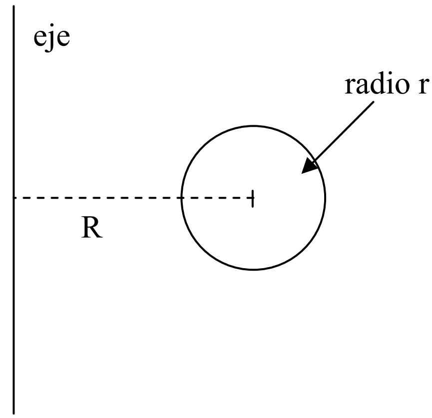
$$\boxed{Y_G = \frac{2}{\pi} R}$$

El baricentro de la semi-circunferencia, como es previsible, se encuentra más arriba que el baricentro del semi-círculo (ver problema 2 5, aplicación ②), ya que $2/\pi \cong 0{,}63$,

mientras que $\dfrac{4}{3\pi} \cong 0{,}42$

---

c) <u>Área lateral del toro</u> :



Aplicaremos la generalización del segundo teorema de Guldin para calcular el área de la superficie tórica, engendrada por la rotación de la circunferencia alrededor del eje.
Su baricentro es el centro de la circunferencia:

$$S = 2\pi R . 2\pi r \text{ , o sea: } \qquad \boxed{S = 4\pi^2 Rr}$$

Problema 2.7

Demostrar que si las raíces de la ecuación en $z \in C$.

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0 \qquad (\text{con } a \neq 0)$$

están en progresión geométrica, se cumple $b^3 = a^3c$ y la ecuación admite la raíz $-\dfrac{b}{a}$. Recíprocamente, demostrar que si se cumple una de las dos últimas condiciones se cumple la otra y la ecuación tiene sus raíces en progresión geométrica.
Aplicación a la resolución de $z^3 + z^2 + 3z + 27 = 0$.

Solución

Si las raíces están en p.g. , las llamaremos p, ph, ph^2 (razón h). Aplicando las relaciones entre coeficientes y raíces, tenemos:

$$\begin{cases} p + ph + ph^2 = -a \\ p^2h + p^2h^2 + p^2h^3 = b \\ p^3h^3 = -c \end{cases}$$

De la primera y la segunda, deducimos b = -aph; y hallamos una condición (1) elevando al cubo:

$$b^3 = -a^3p^3h^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b^3 = a^3\,c}$$

Además, de la penúltima igualdad: ph = $-\dfrac{b}{a}$ $\Rightarrow$

(2) $\boxed{\text{La ecuación admite la raíz } -\dfrac{b}{a}}$

Recíproco

Demostraremos que una cualquiera de las dos condiciones (1) y (2) halladas es suficiente para que las raíces estén en p.g..

(1) $b^3 = a^3\,c$

La ecuación es entonces $z^3 + az^2 + bz + \dfrac{b^3}{a^3} = 0$, de la cual se verifica que –b/a es una raíz.Las tres raíces pueden entonces designarse así::

$$p \qquad -\frac{b}{a} \qquad q$$

Sabemos que el producto de esas tres raíces es $-\frac{b^3}{a^3}$,

de modo que $p(-\frac{b}{a})q = -\frac{b^3}{a^3} \Rightarrow pq = \frac{b^2}{a^2}$ ..

Entonces –b/a es media geométrica entre p y q. Observar que, dados tres números, si uno de ellos es media geométrica de los otros dos, entonces los tres números están en p.g. , colocando en el medio el número que es media geométrica (si el lector no conoce esa propiedad, le será muy simple probarla)

Por lo tanto, las tres raíces de la ecuación están en p.g..

.

(2) <u>la ecuación admite la raíz –b/a</u>

Se tiene entonces

$$\left(-\frac{b}{a}\right)^3 + a\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - b\frac{b}{a} + c = 0 \quad \Rightarrow \quad b^3 = a^3 c$$

Se cumple entonces la condición (1) y, de acuerdo a lo visto, las tres raíces están en p.g..

<u>Aplicación:</u>

En la ecuación $z^3 + z^2 + 3z + 27 = 0$, se cumple $3^3 = 1^3 . 27$, o sea la condición (1) , de modo que la ecuación admite la raíz $-\frac{3}{1}$, o sea -3. Bajándola de grado, se obtiene $z^2 - 2z + 9 = 0$, cuyas raíces son $1 - 2\sqrt{2}\,i$ y $1 + 2\sqrt{2}\,i$. Siendo 9 el producto de esas dos raíces, o sea $(-3)^2$ si, de acuerdo a lo visto, escribimos las tres raíces colocando (-3) como número central, o sea, por ejemplo::

$$1-2\sqrt{2}\,i \qquad -3 \qquad 1+2\sqrt{2}\,i \quad ,$$

Se puede verificar que forman una p.g..

Problema 2.8

Hallar $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n\ \ +n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}+..........\frac{1}{\sqrt{n\ \ +n.n}}\right)$

Solución

Consideramos la integral I = $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2(\sqrt{2}-1)$. Si dividimos el intervalo (1,2) en n partes iguales, obtenemos, para la suma inferior s_n cuyo límite es I cuando n → + ∞ , $s_n = a_n$, siendo a_n la sucesión dada. Entonces:

$$\boxed{\text{lím } a_n = 2(\sqrt{2}-1)}$$

Problema 2.9

Hallar $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}.\sqrt[n]{1+\frac{2}{n}}...............\sqrt[n]{1+\frac{n-1}{n}}\right)$

Solución

Siendo u_n el término de la sucesión, tomamos su logaritmo:

Lu_n = $\frac{1}{n}L(1+\frac{1}{n})+\frac{1}{n}L(1+\frac{2}{n})+..........\frac{1}{n}L(1+\frac{n-1}{n})$

Consideramos entonces la integral I = $\int_0^1 L(1+x)dx = 2L2-1$. Si dividimos el intervalo (0,1) en n partes iguales, obtenemos, para la suma inferior s_n cuyo límite es I cuando

n → + ∞ , $s_n = Lu_n$ .. Entonces:

lím(Lu$_n$) = 2L2 – 1 $\Rightarrow$ lím u$_n$ = e^{2l2-1} , o sea:

$$\boxed{\text{lím } u_n = \frac{4}{e}}$$

Problema 2.10

Hallar $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$

Solución

Siendo u_n el término de la sucesión, tomamos su logaritmo: Lu_n=

$$\frac{1}{n}L\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n}L\frac{1.2.3......n}{n.n,n.......n} = \frac{1}{n}L\frac{1}{n} + \frac{1}{n}L\frac{2}{n} + ... + \frac{1}{n}L\frac{n}{n}$$

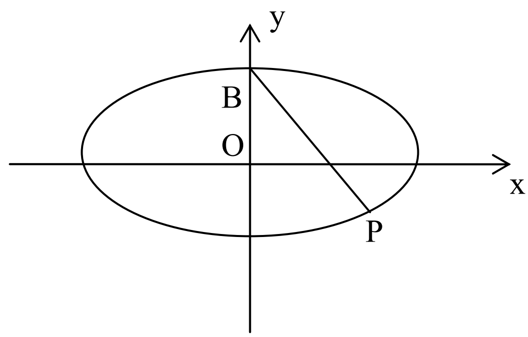
Consideramos entonces la integral $\int_0^1 Lxdx = -1$ .Si dividimos el intervalo (0,1) en n partes iguales, obtenemos, para la suma superior S_n cuyo límite es I cuando n $\to + \infty$, $S_n = Lu_n$ .. Entonces:

lím(Lu$_n$) = – 1 $\Rightarrow$ $\boxed{\text{lím } u_n = \frac{1}{e}}$

Problema 2.11

Sea la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, dada en un referencial ortogonal Oxy. Se considera el punto B(0,b) y se traza una cuerda BP. Hallar para qué posición de P resulta máxima la longitud de BP.

Solución



La ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{, siendo a,b los dos semi-ejes}$$

Dada la simetría de la elipse respecto a Oy, es suficiente encarar el problema en el semi-plano $x \geq 0$. Llamando (x,y) a las coordenadas del punto P buscado, la distancia d del segmento BP está dada por:

$$d^2 = x^2 + (y-b)^2 \quad \text{, con } x\geq 0,\ -b\leq y\leq b$$

Queremos maximizar esta función de (x,y), estando las variables ligadas por la condición $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Emplearemos el método de los multiplicadores de Lagrange. Formamos la función auxiliar:

$$\Phi(x,y) = x^2 + (y-b)^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$$

y anulamos sus derivadas parciales:

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda b^2 x = 0 & (1) \\ 2(y-b) + 2\lambda a^2 y = 0 & (2) \end{cases}$$

La ecuación (1) puede escribirse $x(1+\lambda b^2) = 0$. Analizamos las dos posibilidades:

a) $\underline{x = 0}$ De la ecuación de ligadura, se deduce $y = \pm b$, quedándonos obviamente con $y = -b$. El máximo de la cuerda se produce en P(0,-b), con un valor de 2b para la cuerda

b) $\underline{\lambda = -1/b^2}$ Reemplazando en (2), se obtiene $y = \dfrac{b^3}{b^2 - a^2}$. Empleando la ecuación de ligadura, resulta $x^2 = \dfrac{a^4(a^2 - 2b^2)}{(a^2 - b^2)^2}$, de modo que este caso sólo puede suceder si $a^2 \geq 2b^2$. Si esta condición se cumple, ella implica también que $a^2 > b^2$ y entonces, al extraer la raíz cuadrada x, que debe ser ≥ 0, se obtiene

$$x = \frac{a^2\sqrt{a^2 - 2b^2}}{a^2 - b^2}$$

. El extremo se produce en

$$\mathrm{P}\left(\frac{a^2\sqrt{a^2 - 2b^2}}{a^2 - b^2}, -\frac{b^3}{a^2 - b^2}\right)$$

, obteniéndose

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

para el valor de la cuerda máxima.

RESUMIENDO :

a) Si $a^2 < 2b^2$ (o sea si $b > \frac{a\sqrt{2}}{2}$.) , el máximo de la cuerda BP se produce en P (0, -b) y ese valor máximo es 2b.

b) Si $a^2 \geq 2b^2$ (o sea si $b \leq \frac{a\sqrt{2}}{2}$) , el máximo de la cuerda BP se produce en P $\left(\frac{a^2\sqrt{a^2-2b^2}}{a^2-b^2}, -\frac{b^3}{a^2-b^2} \right)$ y ese valor máximo es $\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$

Observación : Si b=a, o sea si la elipse es una circunferencia de radio a=b=R, estamos en el caso (a), resultando el máximo en (0,-R), con un valor de 2R, como era previsible: la cuerda máxima de una circunferencia es siempre el diámetro

Problema 2.12

Se considera la serie armónica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. En esa serie, se suprimen todos los términos en que n, escrito en el sistema decimal, contiene alguna cifra 7. Estudiar la convergencia de la serie obtenida

Solución

Como primer paso, consideramos los números de k cifras, queriendo hallar cuantos de ellos no contienen la cifra 7.

Para la primera cifra, tenemos 8 posibilidades (no puede ser 0 y tampoco es 7). Cada cifra siguiente puede ser una de las siguientes: 0,1,2,3,4,5,6,8,9, o sea 9 posibilidades; la cantidad de maneras de escribir las (k-1) cifras es AR_{k-1}^{9} (arreglos con repetición), o sea $9^{k-1.}$ En total, la cantidad de números de k cifras que no contienen al 7 será $8.9^{k-1.}$

Consideremos ahora la serie armónica $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.........$

Analizaremos la serie que tiene suprimidos todos los 7 al escribir los denominadores; haremos la suma separando tramos cuyos n tienen 1 cifra, los tramos cuyos n tengan 2 cirfras, etc.:

- 1 cifra: tramo con 8 términos, de suma s_1
- 2 cifras: tramo con 8.9 términos, de suma s_2
- 3 cifras: tramo con 8.9^2 términos, de suma s_3
- ……………………………….
- n cifras: tramo con 8.9^{n-1} términos, de suma s_n
- ………………………………………………….

En el primer tramo, todos los denominadores son ≥ 1, los términos son todos $\leq 1 \Rightarrow s_1 \leq 8$; en el segundo tramo, todos los términos son $\leq 1/10$, de modo que $s_2 \leq 8.9.(1/10)$, y así sucesivamente. Nuestra serie será entonces, asociando los términos mencionados:

$$s_1 + s_2 + s_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

cuyos términos son $\leq$ que los correspondientes de la serie siguiente:

$$8 + 8.9.(1/10) + 8.9^2(1/10)^2 + \ldots\ldots\ldots,$$

la cual es una serie geométrica de razón $9(1/10) = 0,9 < 1$, por lo tanto convergente. Aplicando el criterio de comparación para series de términos positivos, nuestra serie es entonces convergente.

<u>Observación</u> : Nuestra conclusión, si la cifra suprimida fuera cualquiera de las otras no nulas (1,2,3,4,5,6,8,9) en vez del 7,

sería la misma, empleando idéntico razonamiento; si la cifra suprimida fuera el 0, el factor 8 que surgió al considerar la primera cifra sería un 9, o sea que la fórmula de nuestro primer paso sería $9.9^{n-1} = 9^n$, pero la serie geométrica de comparación sería también de razón (9/10), o sea también convergente.

Problema 2.13 (*)

Demostrar que la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{nLn}$ es divergente.

Solución

Consideramos la sucesión $a_n = L[L(n)]$, con $n \geq 2$ y, a partir de ella, formamos la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \{L[L(n+1)] - L(Ln)\}$.

Calculemos su reducida, llamando u_n al término de esa serie:

$$
\begin{aligned}
u_2 &= L(L3) - L(L2) \\
u_3 &= L(L4) - L(L3): \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u_n &= L[L(n+1)] - L(Ln) \\
\hline
S_n &= L[L(n+1)] - L(L2)
\end{aligned}
$$

habiendo sumado miembro a miembro.. Puesto que resulta que $S_n \to +\infty$, la serie considerada es divergente. Consideremos entonces la función $L(Lx)$, cuya derivada es $\frac{1}{xLx}$ y apliquémosle el teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo (n, n+1):

$$L[L(n+1)] - L(Ln) = \frac{1}{(n+\theta)L(n+\theta)},$$

siendo $(n+\theta)$ el punto interior, con $0<\theta<1$. La serie que formamos es entonces :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\{L[L(n+1)]-L(Ln)\}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n+\theta)L(n+\theta)} \quad ,$$

que es divergente, como ya visto.
Pero, obviamente:

$$\frac{1}{nLn}>\frac{1}{(n+\theta)L(n+\theta)}$$

Aplicando entonces el criterio de comparación de las series de términos positivos, la serie dada $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{nLn}$ resulta también divergente.

Problema 2.14 (*)

Sea una sucesión a_n monótona decreciente y tal que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente. Mostrar que $\text{lím}(na_n) = 0$.

Solución

Los términos de la serie son positivos ya que $\text{lím}\ a_n = 0$ y a_n es monótona decreciente. Considerando entonces dos reducidas de la serie S_n y S_m (con $n > m$), sabemos, por un criterio de Cauchy aplicable a las series convergentes de términos positivos:

$$\underset{m\to+\infty}{lím}(S_n - S_m) = 0 \quad ,$$

o sea que:

$$\forall\varepsilon > 0 :\ \exists N/\ m > N\ \Rightarrow\ S_n - S_m < \varepsilon\ ,$$

o sea $a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1} + a_n < \varepsilon$

Siendo cada uno de esos $(n - m)$ términos $\geq a_n$, tendremos:

$$(n - m)a_n < \varepsilon \ \Rightarrow\ n\, a_n - m\, a_n < \varepsilon\ \Rightarrow\ \text{lím}\,(na_n - ma_n) = 0$$

Dejando m fijo y haciendo crecer n indefinidamente, será $\text{lím}(ma_n) = 0$ y por lo tanto: $\text{lím}\ na_n = 0$, con lo cual se completa nuestra demostración.

Observaciones

1) De la propiedad demostrada, puede deducirse fácilmente la divergencia de la serie armónica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.
Esta serie es de términos positivos decrecientes y $na_n = n\frac{1}{n} = 1 \to 1$. Entonces no puede ser convergente porque si lo fuera, ese límite de na_n debría ser 0, de acuerdo a lo demostrado.
2) La condición demostrada es necesaria para la convergencia, pero **no es suficiente.** Por ejemplo, la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{nLn}$ es de términos positivos decrecientes y $na_n = 1/Ln \to 0$. Sin embargo, no es convergente, como fue demostrado en el problema 2.13 .

Problema 2.15 Función Erf(x) (*)

Es sabido que la función e^{-x^2} es muy empleada en el Cálculo de Probabilidades, llamándose "campana de Gauss" a su representación gráfica. Su primitiva, eligiendo la que se anula en x=0, es:

$$\int_0^x e^{-t^2} dt$$

Esa primitiva se designa como Erf(x) (del inglés "error-function", debido a su empleo en la teoría de errores) y, se la clasifica como "trascendente no elemental" porque no puede expresarse mediante las funciones algebraicas o las trascendentes elementales.
Esbozar una representación gráfica para Erf(x) y demostrar o verificar las siguientes propiedades de Erf(x):

a) Erf(x) = $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \qquad \forall x \in R$

b) Erf(x) es continua y creciente en todo punto de R y su derivada es continua y positiva para todo x

c) Erf(x) es impar

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} Erf(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

e) $\displaystyle -\frac{\sqrt{\pi}}{2} < Erf(x) < \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

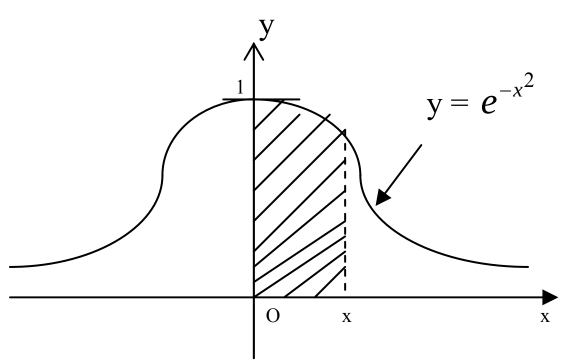
f) Erf(1) = $1 - \dfrac{1}{3.1!} + \dfrac{1}{5.2!} - \dfrac{1}{7.3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

g) la curva representativa tiene, para x>0, su concavidad hacia abajo

h) la pendiente de la tangente en el origen es 1.

Solución

Recordemos la representación gráfica de e^{-x^2}, llamada "campana de Gauss":



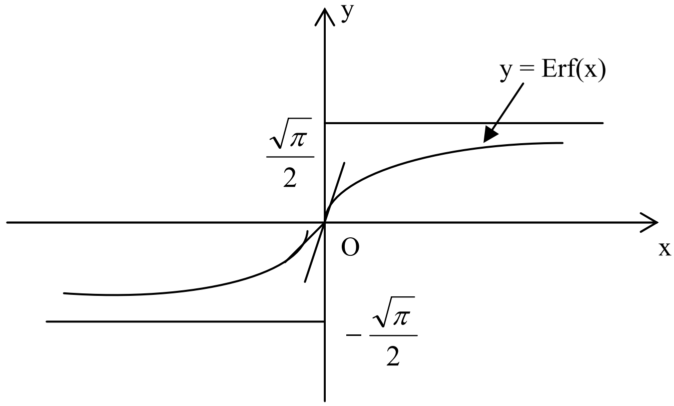
En este gráfico, hemos tomado un punto genérico x y hemos señalado la zona rayada, cuya área es obviamente una función de x, que llamamos F(x):

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = F(x)$$

F(x) es una primitiva de e^{-x^2}, tal que F(0) = 0, de acuerdo a la definición de F(x). Podemos escribir:

$$\int e^{-x^2} dx = F(x) + C \quad , \text{ (C constante arbitraria)}$$

donde F(x) es la primitiva considerada, o sea la que se anula en x=0. Esta primitiva se designa como Erf(x) (del inglés "error function", debido a su empleo en la teoría de errores). Es necesario darle un nombre a esta función pues no puede expresarse mediante las funciones conocidas, o sea las algebraicas y las trascendentes elementales. Se trata de una función trascendente no elemental. Por su definición a partir del área considerada, es naturalmente una función impar (Erf(-x) = Erf(x)).
Vamos a ver que Erf(x) puede calcularse para cualquier x con la aproximación que se desee. Por lo tanto, Erf(x) puede tabularse y representarse gráficamente:



Veremos más adelante la justificación de las asíntotas horizontales que aparecen en este gráfico. La tangente en el origen (punto de inflexión) es obviamente de pendiente 1.

Para la evaluación de Erf(x), recordamos el desarrollo de Mac-Laurin de e^x :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \forall x \in R$$

Si reemplazamos x por $(-x^2)$, obtenemos:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \forall x \in R$$

Integramos término a término:

$$x - \frac{x^3}{3.1!} + \frac{x^5}{5.2!} - \frac{x^7}{7.3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Esta primitiva se anula para x=0; se trata justamente de Erf(x):

$$\boxed{Erf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1).n!} \qquad \forall x \in R}$$

Verificamos que se trata de una función impar; además, para cualquier x, el término general de la serie tiende a 0 ya que

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1).n!} = 0$: esto es obvio cuando x ≤ 1 y

es válido para x > 1 ya que el infinito factorial es de mayor orden que el infinito exponencial.

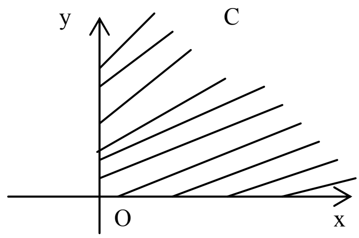
<u>Justificación del gráfico de Erf(x)</u> :

Observamos que:

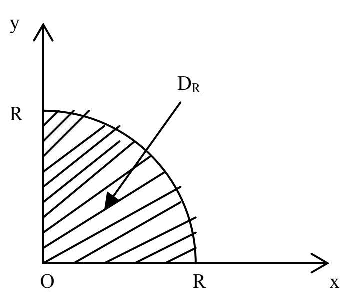
a) El gráfico corresponde a una función impar.
b) La concavidad en la zona x > 0 es hacia abajo pues la derivada segunda de Erf(x) es negativa ya que se trata de la derivada primera de e^{-x^2} .
c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{Erf(x)} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

<u>Demostración</u> :

Consideremos la integral impropia I = $\iint_C e^{-x^2-y^2}\, dxdy$, extendida al primer cuadrante C determinado por los ejes coordenados:



Por una propiedad conocida para las integrales impropias de integrando positivo, podemos cortar C por una curva arbitraria cuyo límite pueda cubrir toda la región C ; elegimos un cuarto de circunferencia de radio R que, junto con los ejes, encierra un cuarto de círculo D_R que tiende a cubrir a C cuando $R \to +\infty$



Resultará pues:

$$I = \lim_{R\to+\infty} \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}\, dxdy \;:$$

Pasamos a coordenadas polares de polo O y eje Ox, llamando I(R) a la integral extendida al dominio D_R ; con las notaciones usuales:

I(R) =

$$\iint_{D_R} e^{-\rho^2}\rho\, d\rho\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_0^R = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)$$

Se desprende entonces, haciendo R $\to +\infty$, que I = $\dfrac{\pi}{4}$.

Por otra parte:

$$\text{I} = \iint_C e^{-x^2}.e^{-y^2}\,dxdy = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy \quad \text{, o sea:}$$

$$\text{I} = \left[\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right]^2$$

Del valor obtenido anteriormente para I, se deduce:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Este resultado nos muestra que $\lim\limits_{x\to+\infty}$ Erf(x) = $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, lo cual justifica las asíntotas indicadas en nuestro gráfico.

Observemos que puede escribirse $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$, lo cual nos suministra un interesante resultado para esta integral impropia, de gran utilidad en el Cálculo de Probabilidades.

<u>Resumen de propiedades de Erf (x)</u>

Indicamos las propiedades más relevantes obtenidas para la función Erf (x):

1) $Erf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1).n!} \qquad \forall x \in R$

2) Erf (x) es continua en todo el campo real

3) Erf (0) = 0

4) Erf (1) = $1 - \dfrac{1}{3.1!} + \dfrac{1}{5.2!} - \dfrac{1}{7.3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (el gráfico nos indica que este valor es menor que 1 ya que $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0{,}886$)

5) Erf (-x) = Erf (x) (la función es impar)

6) lím Erf(x) = $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

x→+∞

7) $-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} <$ Erf (x) $< \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

8) (Erf (x))′ = e^{-x^2} (la pendiente de la tangente en el origen resulta ser 1)

Problema 2.16 Desigualdad de Cauchy-Schwarz (*)

Demostrar que en un espacio vectorial dotado de un producto interno con la norma $\vec{a}^2 = \vec{a}x\vec{a} = \|\vec{a}\|^2$, se cumple:

$$(\vec{a}x\vec{b})^2 \leq \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2$$

Solución

Siendo α un real cualquiera:

$$(\alpha\vec{a} + \vec{b})^2 = \alpha^2\vec{a}^2 + 2\alpha(\vec{a}x\vec{b}) + \vec{b}^2 \quad (1)$$

Si $\vec{a}, \vec{b}$ son linealmente independientes:

$$\alpha\vec{a} + \vec{b} \neq \vec{0} \Rightarrow (\alpha\vec{a} + \vec{b})^2 > 0 \qquad \forall \alpha$$

Por (1), resultará que nuestro segundo miembro será > 0 para todo α :

$$\|\vec{a}\|^2 \alpha^2 + 2(\vec{a} x \vec{b})\alpha + \|\vec{b}\|^2 > 0 \qquad \forall \alpha$$

Tenemos pues un trinomio de segundo grado en α, que resultó > 0 , o sea del signo de su primer coeficiente para todo real α. De acuerdo al teorema del signo del trinomio, su discriminante deberá ser < 0 , o sea :

$$(\vec{a} x \vec{b})^2 - \vec{a}^2 \vec{b}^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad (\vec{a} x \vec{b})^2 < \|a\|^2 \|\vec{b}\|^2$$

Si, en cambio, $\vec{a}, \vec{b}$ son linealmente dependientes, tenemos 3 posibilidades:

1) $\vec{a} = \vec{0}$ En vez de la desigualdad, tendríamos una igualdad
2) $\vec{b} = \vec{0}$ También tendríamos una igualdad
3) $\vec{a} \neq \vec{0}. \vec{b} \neq \vec{0},\ pero\ \vec{b} = \lambda \vec{a},\ con\ \lambda \neq 0$

   En este caso, como es fácil comprobarlo, ambos miembros de nuestra desigualdad resultan ser $\lambda^2 \|\vec{a}\|^4$ y por lo tanto también hay una igualdad.

Para cubrir todos los casos la desigualdad de Cauchy-Schwarz se escribe en forma general:

$$\boxed{(\vec{a} x \vec{b})^2 \leq \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2}$$

Problema 2.17 **(*)**
Sea un polinomio de coeficientes reales $x^3 + ax^2 + bx + c$, cuyas tres raíces son reales. Demostrar que esas tres raíces están contenidas en el intervalo:

$$\left[-\frac{a}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{a^2-3b},\ -\frac{a}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{a^2-3b}\right]$$

Verificar la propiedad para los tres polinomios siguientes:
a) $x^3 - 4x^2 + x + 6$
b) $x^3 - x^2 - x + 1$
c) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

Solución

Sean x_1 , x_2, α las tres raíces. Por las relaciones entre coeficientes y raíces, se sabe que:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \alpha = -a & (1) \\ \alpha(x_1 + x_2) + x_1x_2 = b \end{cases}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de (1), multiplicando por 2 la segunda y restando miembro a miembro, se obtiene:

$$a^2 - 2b = x_1^2 + x_2^2 + \alpha^2 \Rightarrow a^2 - 2b - \alpha^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad (2)$$

Además, por (1) : $a + \alpha = -(x_1 + x_2)$ (3)
Por otra parte, teniendo en cuenta que $2x_1x_2 \le x_1^2 + x_2^2$:

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \le x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 ,$$

resultando $(x_1 + x_2)^2 \le 2(x_1^2 + x_2^2)$. Usando entonces (3):

$$(a + \alpha)^2 \le 2(x_1^2 + x_2^2)$$

Aplicando (2), nos queda finalmente:

$$(a + \alpha)^2 \le 2(a^2 - 2b - \alpha^2)$$

Ordenamos en α :

$$\underline{3\alpha^2 + 2a\alpha + (4b - a^2) \le 0}$$

Por el teorema del signo del trinomio, siendo positivo el primer coeficiente, las dos raíces de ese trinomio deben ser reales y además la variable α debe pertenecer al intervalo de esas raíces, o sea que debe cumplirse, calculando las dos raíces::

$$\left[-\frac{a}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{a^2-3b}\le\alpha\le-\frac{a}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{a^2-3b}\right]$$

Eso es válido para la raíz α, o sea para cualquira de las raíces, lo cual completa nuestra demostración.

Verificación para los tres polinomios del enunciado

a) $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ Raíces (-1,2,3)

Aplicamos la fórmula hallada para el intervalo:

$$\left[\frac{4-2\sqrt{13}}{3},\frac{4+2\sqrt{13}}{3}\right]$$, aproximando [-1,07 , 3,74]

que contiene a las tres raíces.

b) $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ Raíces (-1,1,1)

El intervalo es [-1 , 5/3], que contiene a las tres raíces

c) $P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ Raíces (-1, -1, -1)

El intervalo es [-1 , -1], o sea -1 , que contiene a las 3 raíces (raíz triple).

Problema 2.18 **(*)**

Calcular $\int_0^{+\infty}\frac{senx}{x}dx$

Solución

La dificultad de este cálculo reside en el hecho de que la primitiva Si(x) de la función $\frac{senx}{x}$ es trascendente no

elemental y sólo expresable mediante su desarrollo en serie de potencias (alternada para x>0).
Para poder calcular esa integral, vamos a introducir el factor de reducción e^{-xy} :

$$F(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{senx}{x} dx \qquad (1)$$

Derivamos:

$$F'(y) = -\int_0^{+\infty} e^{-xy} senx dx$$

Integrando dos veces por partes. Se puede evaluar fácilmente esa integral:

$$F'(y) = -\frac{1}{1+y^2} \quad \Rightarrow \quad F(y) = -Arctgy + C ,$$

siendo C la constante de integración. Para hallar C, tomamos límites en ambos miembros para $y \to +\infty$:

$$\lim_{y\to+\infty} F(y) = -\frac{\pi}{2} + C \qquad .$$

Para hallar ese límite, observamos que:

$$|F(y)| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{senx}{x} dx \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xy} dx = \left[-\frac{e^{-xy}}{y} \right]_o^{+\infty} = \frac{1}{y}$$

lo cual es válido para todo y positivo, de modo que el límite buscado es 0, resultando $C = \frac{\pi}{2}$.

Tenemos entonces $F(y) = \frac{\pi}{2} - Arctgy \Rightarrow F(0) = 0$

Por otra parte, teníamos por (1):

$$\lim_{y\to 0} F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{senx}{x} dx$$

Siendo $\underset{y\to 0}{F(y)}$ = F(0) = 0 , resulta:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{senx}{x} dx = \frac{\pi}{2}}$$

Observación :
Analizando nuestro procedimiento, vemos que hemos admitido que:

a) es válido derivar F(y) bajo el signo para $x \geq \alpha > 0$

b) F(y) es continua en el origen.
Aplicando propiedades de la convergencia uniforme de las integrales simples impropias, puede probarse que ambas condiciones son correctas. Las demostraciones escapan del objetivo de este libro y dejaremos que el lector experimentado realice ese análisis.

Problema 2.19 Números de Bernoulli (**)
Los números de Bernoulli (los designaremos "los B") se definen mediante el desarrollo en serie de Mac-Laurin de la función: R→R $\frac{x}{e^x - 1}$. Se trata de números muy importantes del Análisis Matemático que, entre otras aplicaciones, permiten hallar desarrollos en series de potencias de funciones hiperbólicas y trigonométricas, y también conducen a sumar series numéricas del tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ para p=1,2,3,…..

Los B se definen se definen mediante el desarrollo en serie de Mac-Laurin de la función: R→R $\dfrac{x}{e^x - 1}$. Se trata de los coeficientes de esa serie multiplicados por los factoriales respectivos, o sea que esos números, designados por B_0 , B_1 , B_2 , ... se definen mediante la identidad:

$$\forall x \in R: \qquad \frac{x}{e^x - 1} \equiv \frac{1}{\frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots\dots\dots} \equiv \frac{B_0}{0!} + \frac{B_1}{1!}x + \frac{B_2}{2!}x^2 + \dots\dots\dots\dots$$

a) Determinar los cuatro primeros B, o sea B_0 , B_1 , B_2 y B_3 y justificar que todos los B son <u>racionales</u> .

b) Demostrar que todos los B de índice impar (excepto B_1) son nulos, o sea que $B_{2n+1} = 0$ para $n \geq 1$.

c) Demostrar que:

$$C_0^n B_n + C_1^n B_{n-1} + C_2^n B_{n-2} + \dots\dots\dots\dots + C_n^n B_0 = B_n \ ,$$

lo cual, recordando la fórmula del binomio de Newton, se escribe simbólicamente:

$$(B + 1)_n = B_n \quad , \qquad \text{(para n = 2,3,4,.........)}$$

conviniendo en desarrollar el primer miembro empleando sub-índices en vez de exponentes.

d) Hallar B_n conociendo todos los B anteriores, probando que para $n \geq 1$:

$$: \qquad B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{h=2}^{n+1} C_h^{n+1} B_{n+1-h}$$

Aplicar esta fórmula para hallar B_4 , a partir de B_0,B_1,B_2,B_3, calculados en (a).

Solución :

a) Aprovechando la identidad:

$$\left(\frac{B_0}{0!}+\frac{B_1}{1!}x+\frac{B_2}{2!}x^2+.............\right)\left(\frac{1}{1!}+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+.........\right) \equiv 1$$

o sea igualando los coeficientes de los términos de igual grado en ambos miembros, obtenemos:

$$\boxed{B_0 = 1}$$

$$\frac{B_0}{2}+B_1=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_1=-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{B_0}{6}+\frac{B_1}{2}+\frac{B_2}{2}=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_2=\frac{1}{6}}$$

$$\frac{B_0}{24}+\frac{B_1}{6}+\frac{B_2}{4}+\frac{B_3}{12}=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_3=0}$$

b) Consideremos la función $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}+\dfrac{x}{2}$. Se verifica fácilmente que f(-x) ≡ f(x) , de modo que f(x) es par.

Por otra parte, tenemos, recordando el desarrollo de $\dfrac{x}{e^x-1}$:

$$f(x) = \frac{x}{2}+\frac{B_0}{0!}+\frac{B_1}{1!}x+\frac{B_2}{2!}x^2+.............$$

Siendo f(x) una función par, todos los coeficientes de los términos en x con exponente impar serán nulos, de modo que:

$1 + 2B_1 = 0$ $\boxed{B_{2n+1} = 0 \quad , \quad \text{para } n \geq 1}$ $(\Rightarrow B_1 = -\frac{1}{2})$

$B_3 = 0 \qquad B_5 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots$

Entonces

c) En la identidad inicial de (a) , el producto a la Cauchy de las dos series del primer miembro nos da que el coeficiente de x^{n-1} , para $n \geq 1$ es:

$$\frac{1}{n!0!}B_0 + \frac{1}{(n-1)!1!}B_1 + \frac{1}{(n-2)!2!}B_2 + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\frac{1}{1!(n-1)!}B_{n-1}$$

Dado que el producto de las dos series es un número, ese coeficiente debe ser nulo para todo n > 1. Cambiando el orden de los términos y usando números combinatorios, tenemos entonces:

$$C_1^n B_{n-1} + C_2^n B_{n-2} + \ldots\ldots\ldots + C_0^n B_0 = 0 \quad \text{para } n \geq 2$$

Sumando $C_0^n B_n$ a ambos miembros, nos queda:

$$\boxed{C_0^n B_n + C_1^n B_{n-1} + C_2^n B_{n-2} + \ldots\ldots\ldots + C_0^n B_0 = B_n}$$

para todo $n \geq 2$, o sea , simbólicamente:

$$(B+1)_n = B_n$$

d) Escribimos nuestra penúltima igualdad reemplazando n por n+1 (observar que $n+1 \geq 2 \Rightarrow n \geq 1$) :

$$C_1^{n+1} B_n + C_2^{n+1} B_{n-1} + \ldots\ldots\ldots + C_0^{n+1} B_0 = 0$$

de donde:

$$\boxed{B_n - \frac{1}{n+1}\sum_{h=2}^{n+1} C_h^{n+1} B_{n+1-h} \qquad para\ n \geq 1}$$

Entonces:

$$B_4 = -\frac{1}{5}(C_2^5 B_3 + C_3^5 B_2 + C_4^5 B_1 + C_5^5 B_0) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{B_4 = -\frac{1}{30}}$$

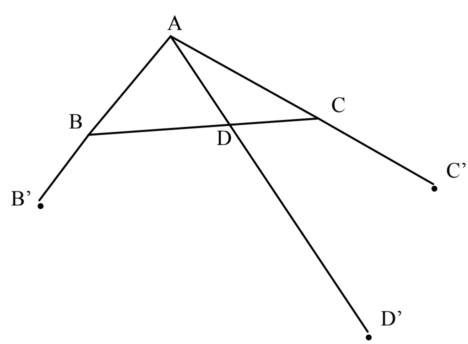
-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

Capítulo II.3 Soluciones para los problemas del capítulo I.3 (Geometría Euclídea)

Problema 3.1

Se da un triángulo ABC y se considera el punto B' sobre la prolongación de AB tal que $\frac{AB'}{AB} = \alpha$ y el punto C' sobre la prolongación de AC tal que $\frac{AC'}{AC} = \beta$, siendo α y β dos reales positivos. Sobre el segmento BC se toma el punto D tal que $\frac{DB}{DC} = \frac{\beta}{\alpha}$ y, sobre la prolongación de AD, el punto D' tal que $\frac{AD'}{AD} = \alpha + \beta$. Mostrar que AB'D'C' es un paralelogramo.

Solución



Por la naturaleza del problema, resulta muy cómodo emplear el Cálculo Vectorial.

Ponemos $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, *de donde* $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$.

Por otra parte, sabemos que

$$\overrightarrow{BD}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BC}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}(\vec{c}-\vec{b})$$

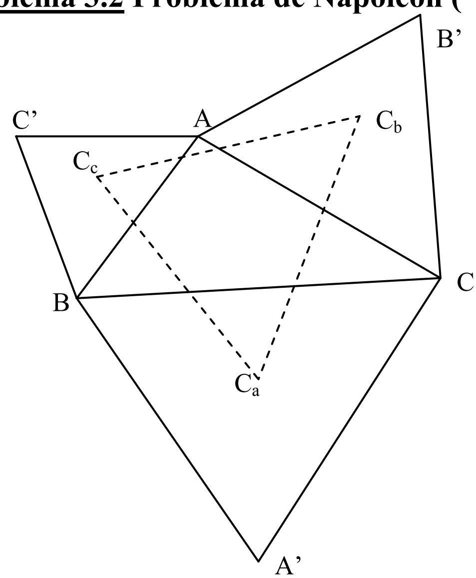
Dado que $\overrightarrow{AD}=\vec{b}+\overrightarrow{BD}$, reemplazando y operando, se obtiene: $\overrightarrow{AD}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\vec{b}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{c}$.

Entonces $\overrightarrow{AD'}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{AD'}=\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}$, o sea:

$$\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}\ ,$$

lo cual implica que AB’D’C’ es un paralelogramo.

<u>Problema 3.2</u> Problema de Napoleón (*)



Sea ABC un triángulo cualquiera. Sobre sus lados, se construyen triángulos equiláteros, exteriormente al triángulo dado. Demostrar que el triángulo de los centros de esos triángulos equiláteros, o sea $C_aC_bC_c$, es a su vez un triángulo equilátero

<u>Solución</u>
Indicaremos tres soluciones, para confirmar nuestra reflexión acerca de las posibles incursiones entre las distintas áreas de la Matemática.
<u>Primera solución</u> : Empleando sólo consideraciones geométricas
Haremos la demostración en la hipótesis de que los tres ángulos del triángulo ABC. Para los casos en que uno de los ángulos sea 120º o > 120º, dejamos que el lector reflexione sobre una prueba similar a la que describimos.
También dejaremos que el lector complete su figura a medida que lea nuestra solución, para permitirle compenetrarse más cómodamente con nuestro razonamiento.
Sean $\mathscr{C}_a$, $\mathscr{C}_b$, $\mathscr{C}_c$ las circunferencias circuncscriptas a a los triángulos equiláteros exteriores, de centros C_a , C_b , C_c respectivamente. Sea P el otro punto de intersección de $\mathscr{C}_a$ y $\mathscr{C}_b$ .Ese punto P ve al segmento AB bajo un ángulo 180º - . 60º = 120º y también al segmento AC bajo 120º. Resultará que P ve al segmento AC bajo 360º - 120º- 120º = 120º. El punto P es entonces el punto interior al triángulo ABC que ve a los tres lados bajo 120º (hacemos notar que se llama “punto de Fermat” y que corresponde al P interior para el cual PB + PB+ +PC es mínimo; ver nuestro libro “Viajando por rincones matemáticos”, en el cual lo obtuvimos comoun caso particular del “centro de cargas”, capítulo 1.6, pág. 105).
Los dos círculos $\mathscr{C}_c$ y $\mathscr{C}_b$ tienen la cuerda AP en común, de modo que C_c C_b es la mediatriz de AP y llamaremos M

al punto medio de AP; análogamente, $C_c\, C_a$ es la mediatriz de BP y llamaremos N al punto medio de BP.
Al tener el cuadrilátero C_c MPN dos ángulos opuestos suplementarios(90º en M y 90º en N), será inscriptible y por lo tanto $M\widehat{C_c}N = 180º - M\widehat{P}N = 180º - 120º = 60º$
Resulta entonces que los segmentos $C_c\, C_b$ y $C_c\, C_a$ forman entre ellos un ángulo de 60º. Análogamente, también el ángulo entre $C_b\, C_c$ y $C_b\, C_a$ es 60º.
Se concluye entonces que el triángulo $C_a\, C_b\, C_c$ es equilátero.

Segunda solución : Empleando relaciones métricas y trigonometría

Llamando $\widehat{C}$ al ángulo en C del triángulo dado ABC, tenemos $C_a\widehat{C}C_b = \widehat{C} + 60º$, de modo que aplicando el teorema del coseno en el triángulo CC_aC_b y llamando, con la notación habitual a,b,c a los lados del triángulo ABC dado:

$$\overline{C_aC_b}^2 = \overline{CC_a}^2 + \overline{CC_b}^2 - 2\overline{CC_a}.\overline{CC_b}\cos(\widehat{C} + 60º)$$

$$= \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} - 2\frac{ab}{3}(\cos\widehat{C}\cos 60º - sen\widehat{C} sen 60º)$$

$$= \frac{1}{3}[a^2 + b^2 - ab(\cos\widehat{C} - \sqrt{3}\, sen\widehat{C})$$

Por otra parte, el teorema del coseno en el triángulo ABC nos da: $\cos\widehat{C} = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, de lo cual podemos obtener $sen\widehat{C}$ usando $sen^2\widehat{C} = 1 - \cos^2\widehat{C}$. Operando, se obtiene:

$$sen\widehat{C} = \frac{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}{2ab}$$

Reemplazando $\cos\widehat{C}$ y $sen\widehat{C}$ en la expresión de $\overline{C_aC_b}^2$ y operando, se obtiene:

$$\overline{C_aC_b}^2 = \frac{1}{6}\left(a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{3}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}\right)$$

Permutando b y c entre sí, se obtiene análogamente:

$$\overline{C_aC_c}^2 = \frac{1}{6}\left(a^2 + c^2 + b^2 + \sqrt{3}\sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}\right)$$

Para probar que $C_aC_b = C_aC_c$, basta pues verificar simplemente que:

$$4a^2 b^2 .- (a^2 + b^2 - c^2)^2 = 4a^2 c^2 .- (a^2 + c^2 - b^2)^2 ,$$

lo cual, desarrollando, es inmediato

Si en vez de permutar b y c en la expresión de $\overline{C_aC_c}^2$, permutamos a y c , obtenemos $\overline{C_cC_b}^2$ y verificamos análogamente que $C_a C_b = C_cC_b$.

Habiendo entonces mostrado que $C_aC_b = C_bC_c = C_cC_a$ y queda probado que el triángulo $C_aC_bC_c$ es equilátero.

<u>Tercera solución</u> : Empleando números complejos

Designaremos con minúsculas los complejos correspondientes a los puntos designados con mayúsculas en la figura:

$$\begin{cases} a' = b + (c-b)e^{-\frac{\pi}{3}i} \\ b' = c + (a-c)e^{-\frac{\pi}{3}i} \\ c' = a + (b-a)e^{-\frac{\pi}{3}i} \end{cases}$$

Se pueden calcular entonces c_a , c_b y c_c . Por ejemplo:

$$c_a = \frac{1}{3}(b + c + a')$$

Reemplazando a' y operando, se obtiene::

$$c_a = \frac{1}{3}\left[(2 - e^{-\frac{\pi}{3}i})b + (1 + e^{-\frac{\pi}{3}i})c \right]$$

Análogamente:

$$c_b = \frac{1}{3}\left[(2 - e^{-\frac{\pi}{3}i})c + (1 + e^{-\frac{\pi}{3}i})a \right]$$

$$c_c = \frac{1}{3}\left[(2 - e^{-\frac{\pi}{3}i})a + (1 + e^{-\frac{\pi}{3}i})b \right]$$

Para probar que $C_aC_bC_c$ es equilátero, basta verificar que:

$$c_c - c_a = (c_b - c_a)e^{\frac{\pi}{3}i}$$

Al tener c_a , c_b , c_c en función de a, b, c, podemos reemplazarlos; operando luego y ordenando, se llega a que la igualdad a verificar es equivalente a la siguiente:

$$(1-e^{\frac{\pi}{3}i}-e^{-\frac{\pi}{3}i})a+(-2+2e^{-\frac{\pi}{3}i}+2e^{\frac{\pi}{3}i})b+(1-e^{-\frac{\pi}{3}i}-e^{\frac{\pi}{3}i})=0$$

Siendo obviamente nulos los tres paréntesis, queda verificada la igualdad.

Problema 3.3

Demostrar que en todo triángulo, se cumple R ≥ 2r , siendo R el circunradio y r el inradio.

Solución

Emplearemos estas notaciones:
O = circuncentro del triángulo;
(O) = circunferencia circunscripta al triángulo
I = incentro del triángulo
d_{IO} = distancia entre O e I
Una conocida fórmula de Euler para el triángulo (ver mi libro "Viajando por rincones matemáticos – Itinerario 2" , párrafo 3.6, página 90) establece que d_{IO}^2 = R(R – 2r). Se deduce entonces que R ≥ 2r.

Problema 3.4

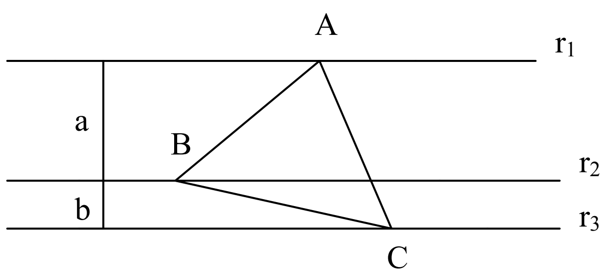
En un triángulo ABC cualquiera, sean AA´, BB¨, CC´ las alturas y H el ortocentro. Demostrar que $\overline{HA}.\overline{HA'}=\overline{HB}.\overline{HB'}=\overline{HC}.\overline{HC'}$

Solución:

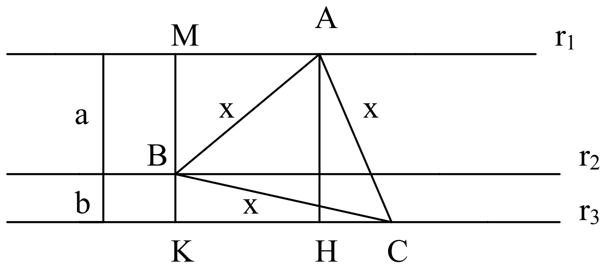
Los triángulos HAC' y HCA' son semejantes (ambos son rectángulos y los ángulos en H son iguales por ser opuestos el vértice).Entonces $\frac{HC'}{HA'}=\frac{HA}{HC}\Rightarrow\overline{HA}.\overline{HA'}=\overline{HC}.\overline{HC'}$
Análogamente para la otra igualdad.

Problema 3.5
Dadas 3 rectas paralelas, construir un triángulo equilátero que tenga un vértice sobre cada una de las rectas. Calcular además el lado del triángulo conociendo las distancias mutuas entre las rectas

Solución



Si a = b , el problema es trivial pues basta tomar AC perpendicular a las rectas y $C\widehat{A}B = 60^o$.
Supondremos entonces $a \neq b$, por ejemplo $a > b$ para fijar ideas, La construcción se efectúa de la manera siguiente:
Tomamos A cualquiera y observamos que $B \rightarrow C$ en la rotación de centro A y ángulo 60º en sentido antihorario. Como el lugar geométrico de un B cualquiera es r_2 , transformamos esa recta r_2 en r_2' mediante la rotación mencionada; se tendrá entonces $r_2' \cap r_3 = C$ y podemos entonces completar la construcción.
Cálculo :
Desde A, trazamos la perpendicular AH a r_3 y desde B la recta perpendicular a las tres rectas, que corta a r_1 en M y a r_3 en K. Ponemos AB = BC = CA = x :



En los triángulos rectángulos ABM y BCK, respectivamente, podemos calcular AM y CK:

$$AM = \sqrt{x^2 - a^2} \qquad CK = \sqrt{x^2 - b^2}$$

Se deduce CH = CK – AM = $\sqrt{x^2 - b^2} - \sqrt{x^2 - a^2}$ (observar que hemos tomado a > b, de modo que el primer radical es mayor que el segundo). Además, en el triángulo ACH, tenemos $CH = \sqrt{x^2 - (a+b)^2}$, de donde:

$$\sqrt{x^2 - b^2} - \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{x^2 - (a+b)^2}$$

Operando (con dos elevaciones al cuadrado) y ordenando, esa ecuación se transforma en :

$$3x^4 - 4(a^2+b^2+ab)x^2 = 0$$

Siendo $x \neq 0$, nos queda:

$$3x^2 - 4(a^2+b^2+ab) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{x = 2\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + ab}{3}}}$$

Verificamos que si b = a, resulta x = 2a.

Observación: Ese cálculo nos da otra solución para el problema de la construcción del triángulo ABC, ya que la fórmula hallada para x nos da un segmento construible. Simplemente para orientar al lector, indicamos la forma de construir x a partir de los segmentos a y b :

Escribimos $x^2 = 4\dfrac{a^2+b^2}{3} + 4\dfrac{ab}{3}$.

Construimos primero el segmento m tal que

$m^2 = 4\dfrac{a^2+b^2}{3}$, o sea $m = 2\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{a^2+b^2}$;

$\sqrt{a^2+b^2}$ es una construcción pitagórica; multiplicar por $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ se realiza mediante el lado de un triángulo equilátero de altura $\sqrt{a^2+b^2}$. A continuación se construye el segmento n tal que $n^2 = 4\dfrac{ab}{3}$, o sea $n = 2\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{ab}$;

$\sqrt{ab}$ es una media proporcional entre a y b y se la multiplica luego por $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ como antes, empleando un triángulo equilátero. Tenemos pues $x^2 = m^2 + n^2$, siendo m y n dos segmentos ya construidos. Construir x es luego inmediato usando un triángulo rectángulo de catetos m y n. Se logra así otra construcción con regla y compás para el triángulo ABC.

Problema 3.6
En un círculo dado se consideran los lados siguientes para los polígonos regulares inscriptos: a para el pentágono, b para el decágono y c para el hexágono. Probar que con a, b, c puede construirse un triángulo rectángulo, o sea que $a^2 = b^2 + c^2$.

Solución

Sea R el radio del círculo. Si α es el ángulo al centro para el lado ℓ de un polígono regular.inscripto, se tiene

$\ell = 2R\text{sen}(\alpha/2)$.

Para el pentágono: ($\alpha = 72^o$) : $a = 2R\text{sen}(36^o)$

Para el decágono ($\alpha = 36^o$) : $b = 2R\text{sen}(18^o)$

Para el hexágono ($\alpha = 60^o$) : $c = R$

Las líneas trigonométricas de 36º y 18º se calculan empleando relaciones trigonométricas o procedimientos geométricos; recordemos que:

$$\text{sen}(36^o) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \qquad \text{sen}(18^o) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Resulta pues:

$$a^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}R^2 \qquad b^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}R^2$$

Entonces:

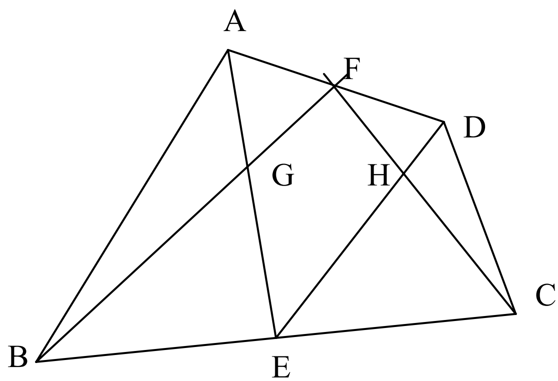
$$b^2 + c^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}R^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2.$$

Problema 3.7
Sea un cuadrilátero ABCD. Se toma el punto medio E del lado BC y el punto medio F del lado opuesto AD. Se une E con A y D, y F con B y C. Sean $G = AE \cap BF$ y $H = CF \cap DE$.

Sean S_1, S_2 , S_3, S_4 las áreas de los triángulos AGF, CHE, BGE, DHF respectivamente. Probar que: $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$

Solución

.



Sean h_{E} = distancia de E a AD

h_F =distancia de F a BE.

Consideramos los cuadriláteros AFCE y BFDE. Sus respectivas áreas son, descomponiéndolas en triángulos:

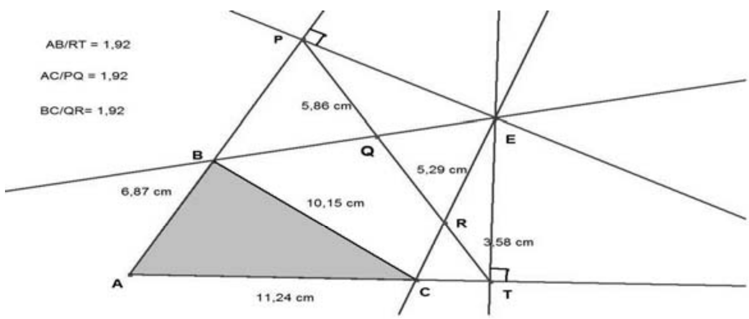
$$S(AFCE) = S(EAF) + S(FEC) = \frac{1}{2} h_E.\overline{AF} + \frac{1}{2} h_F.\overline{EC}$$

$$S(BFDE) = S(EFD) + S(FBE) = \frac{1}{2} h_E.\overline{FD} + \frac{1}{2} h_F.\overline{BE}$$

Siendo AF = FD y EC = BE, esas dos áreas resultan iguales. Si a esas dos áreas les restamos el área del cuadrilátero EGFH nos queda:

$$S_1 + S_2 = S_3 + S_4 \qquad \text{L.Q.Q.D.}$$

Problema 3.8 **(*)**
Dado un triángulo cualquiera ABC, se considera el exincentro E ubicado dentro del ángulo $\hat{A}$. Desde E, se trazan las perpendiculares a AB y a AC, respectivamente EP y ET. El segmento PT corta en Q a la bisectriz exterior de $\hat{B}$ y en R a la bisectriz exterior de $\hat{C}$.
Demostrar que los segmentos QR, PQ y RT son proporcionales, en ese orden, a los lados BC, AC y AB del triángulo, o sea que: $\frac{QR}{a} = \frac{PQ}{b} = \frac{RT}{c}$
Para mejor lectura de ese enunciado, mostramos la figura con dimensiones particulares elegidas para esta figura:



Solución
La clave de la solución consiste en observar que tomando distintos triángulos ABC semejantes entre sí, las figuras obtenidas con el dibujo son todas semejantes entre sí, de modo que dándose dos ángulos de ABC (para asegurarse la semejanza), todos los ángulos de la figura son calculables en función de esos dos ángulos; elegimos B y C y calcularemos todos esos ángulos en función de B y C. Para calcular longitudes de segmentos en una de esas figuras, basta darse

un segmento de la figura, por lo cual hemos elegido el radio r del círculo exinscripto por parecer la estrategia más simple.

En lo que sigue, emplearemos las siguientes notaciones:

1) Llamaremos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ a los tres ángulos del triángulo dado.

2) En el triángulo EPT de la figura, aparecen 1

- en E, tres ángulos; mirándolos de arriba hacia abajo, los llamaremos $\hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{E}_3$
- en Q, dos ángulos, de arriba hacia abajo serán $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \hat{Q}_3$
- en R, dos ángulos, de arriba hacia abajo serán $\hat{R}_1, \hat{R}_2$

<u>Paso 1:</u> Cálculo de algunos ángulos de la figura

Observando que el cuadrilátero APET es inscriptible y que la bisectriz de A pasa por E , se obtiene inmediatamente:

$$E\hat{P}T = E\hat{T}P = \frac{A}{2} \qquad \text{y} \qquad P\hat{E}T = 180^{\circ} - A$$

Se deducen fácilmente los ángulos que mencionamos anteriormente:

$$\hat{E}_1 = \hat{B}/2 \qquad \hat{E}_2 = \hat{B}/2 + \hat{C}/2 \qquad \hat{E}_3 = \hat{C}/2$$

$$\hat{R}_1 = 90^{\circ} - \hat{B}/2 \qquad \hat{R}_2 = 90^{\circ} + \hat{B}/2$$

$$\hat{Q}_1 = 90^{\circ} + \hat{C}/2 \qquad \hat{Q}_2 = 90^{\circ} - \hat{C}/2$$

<u>Paso 2</u> : Cálculo de los segmentos PQ, RT y QR

a) En el triángulo EPQ, aplicamos el teorema de los senos:

$$\frac{PQ}{sen\hat{E}_1} = \frac{r}{sen\hat{Q}_1} \Rightarrow PQ = r\,\frac{sen(\hat{B}/2)}{sen(90^{\circ} + \hat{C}/2)} \qquad , \qquad \text{de}$$

acuerdo a los valores delos ángulos obtenidos en el paso1 .

La expresión obtenida puede escribirse también:

$$\boxed{PQ = r\,\frac{sen(\widehat{B}/2)}{sen(\widehat{C}/2)}}$$

b) Análogamente, considerando el triángulo ERT :

$$\boxed{RT = r\,\frac{sen(\widehat{C}/2)}{sen(\widehat{B}/2)}}$$

c) En el triángulo isósceles EPT, obtenemos

$PT = 2r\cos(\hat{A}/2)$.

Siendo QR = PT – PQ - RT , tenemos:

$$QR = 2r\cos\hat{A}/2 - r\,\frac{sen(\hat{B}/2)}{\cos(\hat{C}/2)} - r\,\frac{sen(\hat{C}/2)}{\cos(\hat{B}/2)}$$

$$= r\,\frac{2\cos(\hat{A}/2)\cos(\hat{B}/2)\cos(\hat{C}/2) - sen(\hat{B}/2)\cos(\hat{B}/2) - sen(\hat{C}/2)\cos(\hat{C}}{\cos(\hat{B}/2)\cos(\hat{C}/2)}$$

Pero

$$\frac{\hat{A}}{2} = \frac{180º - \hat{B} - \hat{C}}{2} = 90º - (\frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}) \Rightarrow \cos\frac{\hat{A}}{2} = sen(\frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2})$$

Transformaremos entonces el numerador N de QR:

N=

$$2sen(\hat{B}/2 + \hat{C}/2)\cos(\hat{B}/2)\cos\hat{C}/2) - sen(\hat{B}/2)\cos(\hat{B}/2) - sen(\hat{C}/2)\cos(\hat{C}/2)$$

=

$$2[sen(\hat{B}/2)\cos(\hat{C}/2) + \cos(\hat{B}/2)sen(\hat{C}/2)]\cos(\hat{B}/2)\cos(\hat{C}/2)$$

$$- sen(\hat{B}/2)\cos(\hat{B}/2) - sen(\hat{C}/2)\cos(\hat{C}/2)$$

=

$$2sen(\hat{B}/2)\cos(\hat{B}/2)\cos^2(\hat{C}/2)+2\cos^2(\hat{B}/2)sen(\hat{C}/2)\cos(\hat{C}/2)$$
$$-sen(\hat{B}/2)\cos(\hat{B}/2)-sen(\hat{C}/2)\cos(\hat{C}/2)$$

$$=$$
$$2sen(\hat{B}/2)\cos(\hat{B}/2)\frac{1+\cos\hat{C}}{2}+2\frac{1+\cos\hat{B}}{2}sen(\hat{C}/2)\cos(\hat{C}/2)$$
$$-sen(\hat{B}/2)\cos(\hat{B}/2)-sen(\hat{C}/2)\cos(\hat{C}/2)$$

$$= sen\hat{B}\frac{1+\cos\hat{C}}{2}+\frac{1+\cos\hat{B}}{2}sen\hat{C}-\frac{sen\hat{B}}{2}-\frac{sen\hat{C}}{2}$$
$$= \frac{sen\hat{B}\cos\hat{C}+\cos\hat{B}sen\hat{C}}{2}$$

o sea: $\quad N = \dfrac{sen(\hat{B}+\hat{C})}{2}$

Reemplazamos esta expresión de N en el numerador de QR, obteniendo entonces:

$$\boxed{QR = r\frac{sen(\hat{B}+\hat{C})}{2\cos(\hat{B}/2)\cos(\hat{C}/2)}}$$

Paso 3: Cálculo de las razones de la tesis
De acuerdo a los segmentos obtenidos:

$$\frac{QR}{a}=\frac{r}{2a}\frac{sen(\hat{B}+\hat{C})}{\cos(\hat{B}/2)\cos(\hat{C}/2)} \qquad (1)$$

$$\frac{PQ}{b}=\frac{r}{b}\frac{sen(\hat{B}/2)}{\cos(\hat{C}/2)} \qquad (2)$$

$$\frac{RT}{c}=\frac{r}{c}\frac{sen(\hat{C}/2)}{\cos(\hat{B}/2)} \qquad (3)$$

Paso 4 : Verificación de la tesis
(1)=(2) $\Leftrightarrow$

$$\frac{sen(\hat{B}+\hat{C})}{2a\cos(\hat{B}/2)\cos(\hat{C}/2)}=\frac{sen(\hat{B}/2)}{b\cos(\hat{C}/2)}\Leftrightarrow bsen(\hat{B}+\hat{C})=2asen(\hat{B}/2)\cos(\hat{B}/2)$$

Siendo $(\hat{B}+\hat{C})$ el suplemento de $\hat{A}$ y usando la fórmula del seno del arco doble, la última igualdad es equivalente a :

$$bsen\hat{A}=asen\hat{B}\Leftrightarrow\frac{b}{sen\hat{B}}=\frac{a}{sen\hat{A}}\quad ,$$

lo cual es cierto por el teorema de los senos.

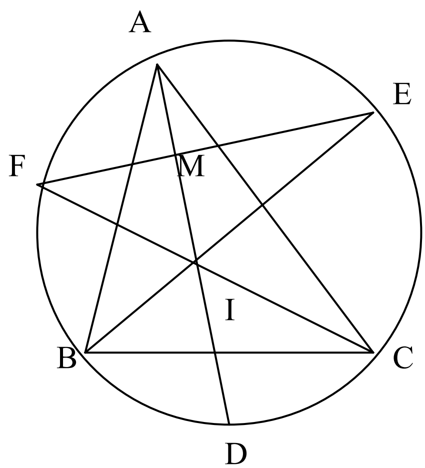
Análogamente $(1)=(3)\Leftrightarrow\dfrac{c}{sen\hat{C}}=\dfrac{a}{sen\hat{A}}$, lo cual también es cierto.

Nos queda pues (1) = (2) = (3) y resulta entonces terminada la demostración.

Problema 3.9

Sea ABC un triángulo inscripto en una circunferencia. Las bisectrices de los ángulos A, B, C cortan a la circunferencia en D, E, F respectivamente. Probar que EF es perpendicular a AD.

Solución



Hemos llamado I al corte de las tres bisectrices, o sea el incentro del triángulo. Los puntos D, E, F son obviamente los medios de los arcos BC, CA y AB, respectivamente. M es el punto de corte de AD con EF. Llamaremos α, β, γ a los tres ángulos del triángulo ABC dado, en correspondencia con los vértices A, B, C.
Tenemos:

$$I\widehat{M}F = 180^{\circ} - M\widehat{I}F - M\widehat{F}I$$

Pero $M\widehat{I}F = C\widehat{I}D$ (opuestos por el vértice), el cual es un ángulo exterior del triángulo AIC $\Rightarrow$ $M\widehat{I}F = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\gamma}{2}$

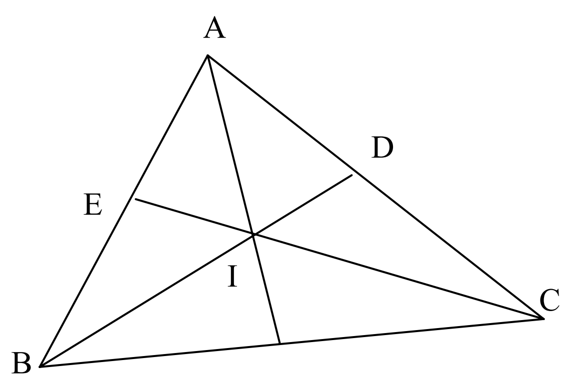
Además, $M\widehat{F}I$ ve al arco CE de la circunferencia y por lo tanto $M\widehat{F}I = \dfrac{\beta}{2}$. Resulta entonces:

$$I\widehat{M}F = 180^{\circ} - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) - \frac{\beta}{2} = 90^{\circ} \Rightarrow AD \perp EF$$

Problema 3.10 (*)

En un triángulo ABC, la bisectriz de $\widehat{B}$ corta a AC en D y la bisectriz de $\widehat{C}$ corta a AB en E. Si I es el incentro del triángulo, demostrar que si ID = IE, entonces ABC debe ser isósceles (AB=AC) o bien $\widehat{A}$ debe ser 60º (pueden ocurrir ambas consecuencias ya que no son incompatibles)

Solución



Llamaremos α, β, γ a los ángulos del triángulo, en correspondencia con los vértices A, B, C.

Para el triángulo BDC, el ángulo $B\widehat{D}A$ es un ángulo exterior y por lo tanto es igual a la suma de los dos ángulos no adyacentes: $B\widehat{D}A = \gamma + \dfrac{\beta}{2}$

Análogamente, $A\widehat{E}I$ es un ángulo exterior para el triángulo BEC; por lo tanto: $A\widehat{E}I = \beta + \dfrac{\gamma}{2}$

En el triángulo IDA, aplicamos el teorema de los senos:

$$\frac{ID}{sen(\alpha/2)} = \frac{IA}{sen(\gamma + \frac{\beta}{2})}$$

Análogamente, en el triángulo IEA :

$$\frac{IE}{sen(\alpha/2)} = \frac{IA}{sen(\beta + \frac{\gamma}{2})}$$

Siendo por hipótesis ID = IE, se deduce de las últimas dos igualdades:

$$\frac{sen(\alpha/2)}{sen(\gamma + \frac{\beta}{2})} = \frac{sen(\alpha/2)}{sen(\beta + \frac{\gamma}{2})} \;,$$

s sea:

$$sen(\frac{\alpha}{2})\left[sen(\beta + \frac{\gamma}{2}) - sen(\gamma + \frac{\beta}{2})\right] = 0$$

Tenemos sen(α/2) ≠ 0, ya que α no es 0º ni 360º; nos queda entonces:

$$sen(\beta + \frac{\gamma}{2}) = sen(\gamma + \frac{\beta}{2})$$

Se presentan entonces 2 posibilidades:

1) $\beta + \frac{\gamma}{2} = \gamma + \frac{\beta}{2} \Rightarrow 2\beta + \gamma = 2\gamma + \beta \Rightarrow \beta = \gamma \Rightarrow$

<u>ABC isósceles (AB = AC)</u>

2) $\beta + \frac{\gamma}{2} = 180^{\circ} - (\gamma + \frac{\beta}{2}) \Rightarrow 2\beta + \gamma = 360^{\circ} - 2\gamma - \beta \Rightarrow$

$\beta + \gamma = 120^{\circ} \Rightarrow \underline{\alpha = 60^{\circ}}$

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

PARTE III

LOS PILARES DE LA MATEMÁTICA

Cauchy

Cuando se evocan los hechos más relevantes en la historia de la Matemática, es bien sabido que ocupa un primerísimo lugar la mención a Newton y Leibniz como “inventores” del Cálculo Diferencial e Integral , en el siglo XVII. Esos dos grandes genios matemáticos nacieron en la misma época (Newton en 1642, Leibniz en 1646) y fallecieron en fechas cercanas (Newton en 1727, Leibniz en 1716). Isaac NEWTON nació y vivió en Inglaterra, mientras que Gottfried LEIBNIZ nació y vivió en Alemania. Pero , en realidad, el primero que utilizó métodos infinitesimales para obtener importantes aplicaciones en el cálculo de áreas de figuras curvilíneas y volúmenes de cuerpos limitados por superficies curvas fue …..el gran Arquímedes; éste declaró que seguramente sus descendientes formalizarían y darían rigor a esos métodos de cálculo, lo cual efectivamente se consolidó después de … ¡20 siglos! Pero, por supuesto, no deben sacarse méritos a Newton y Leibniz que, tantos años después de Arquímedes, fueron realmente los primeros en construir los pilares del Cálculo Infinitesimal. El azar (o el estado de avance de la Matemática en esos años) hizo que, en forma totalmente independiente, Newton (en Inglaterra) y Leibniz (en Alemania) obtuvieran esos avances espectaculares que son la base del Cálculo (no perder de vista la dificultad de las comunicaciones en aquellos años). Lamentablemente, nacionalismos mal aplicados produjeron grandes controversias acerca de cual de ellos era el verdadero creador…Un caso similar pero menos acentuado se dio con respecto al famoso triángulo de Pascal o de Tartaglia de Análisis Combinatorio (Pascal en Francia, Tartaglia en Italia…)

Me ha interesado profundamente conocer la historia de los genios matemáticos como seres humanos y no solamente por la importancia de sus creaciones. Entre las personas llamadas “cultas” se desprecia naturalmente a quien no conoce lo básico acerca de Cervantes, Shakespeare o Victor Hugo, pero muchas de esas personas “cultas” confiesan con orgullo (??) no saber de qué habla el teorema de Pitágoras o ignorar los nombres de Fermat, Euler o Gauss. La excusa que manejan es a menudo: “nunca entendí nada acerca de las matemáticas y tampoco sentí ningún interés en saber algo al respecto…”, invocando naturalmente a sus tiempos de alumno escolar o liceal. No es necesario ser escritor profesional para conocer la existencia de los escritores mencionados, ni tampoco filósofo para tener una idea de lo que nos legaron Bergson, Poincaré o Bertrand Russell . Pero creo que los docentes de Matemáticas de la enseñanza media deberían recibir nociones sobre la evolución de la Matemática desde la antigüedad hasta nuestros días y ser informados acerca de los nombres más célebres; podrán así a su vez transmitir a sus alumnos por lo menos la nacionalidad de los grandes matemáticos y la época en que vivieron; esos nombres no pueden ser ignorados
en una formación razonable de los aspirantes al Bachillerato, así como no pueden ser ignorados Cervantes o Shakespeare… Esta idea por supuesto se aplicaría a todas las áreas importantes de la Ciencia en general y no solamente a las Matemáticas.

Por tales razones, he querido aquí simplemente mencionar algunos nombres que no pueden ser ignorados y que he elegido entre la numerosísima cantidad de los matemáticos de antaño y de tiempos cercanos, considerando los más representativos de su ciencia o los que fueron realmente genios creadores. Esa elección es una tarea muy incómoda ya que me he impuesto mencionar sólo 20 nombres, con las consecuentes limitaciones; seguramente para algún lector versado puede resultar inaceptable que en esta lista no aparezca algún nombre a su juicio muy importante; pido disculpas por esas omisiones pero no se tiene otra opción si se quiere presentar una lista limitada. He aquí los nombres que he retenido:

EUCLIDES – ARQUÍMEDES – DESCARTES – FERMAT-
PASCAL – NEWTON – LEIBNIZ – EULER -
LAGRANGE – LAPLACE – FOURIER – **GAUSS –**
CAUCHY – ABEL – GALOIS – WEIERSTRASS –
RIEMANN – DEDEKIND – POINCARÉ – CANTOR

He destacado el nombre de Gauss porque ha sido considerado por sus colegas como “el Príncipe de los Matemáticos”.

En esta breve evocación de los pilares de la Matemática, no puedo dejar de mencionar que también la Matemática ha contribuido a encontrar las leyes que a su vez son los pilares de la Física y del conocimiento del Universo Con las limitaciones del caso, voy a recordar las 5 ecuaciones que han sido a menudo consideradas como las leyes que cambiaron el mundo y sobre las cuales se apoya la Física. Para cada una de esas ecuaciones, indicaremos el nombre del creador de la misma:

1) $F = g\dfrac{m_A m_B}{d^2}$ Ley universal de la gravedad

(Isaac Newton)

2) $p + \mu g h + \dfrac{\mu}{2}v^2 =$ constante Ley de la presión

hidráulica
(Daniel Bernoulli)

3) $\nabla E = -\dfrac{\partial B}{\partial t}$ Ley de la inducción electromagnética

(Michel Faraday)

4) $\Delta Q_{universo} > 0$ Segunda ley de la Termodinámica
(Rudolf Clausius)
5) $E = mc^2$ Ley de la Relatividad especial
(Albert Einstein)

Finalmente, en este breve vistazo histórico de la Matemática, deseamos llamar la atención del lector acerca de un esfuerzo realizado por los matemáticos de nuestros días: ellos han creado una especie de "árbol genealógico" conteniendo los antecesores y los descendientes de un matemático individualizado por su nombre; naturalmente, se trata de un árbol "académico" y no "familiar". Ese árbol está disponible en nuestros días en un sitio de Internet. Si el lector es un matemático profesional, puede ingresar al árbol con su nombre y descubrir así sus "descendientes" (alumnos que lo han tenido como tutor en estudios de post-grado) y sus "antecesores". Sólo se puede ascender hasta aproximadamente el siglo XVII, pues para tiempos más remotos es muy difícil obtener información que relacione a los distintos matemáticos en actividades comunes.; pero quizás Vd. pueda descubrir que …¡es "descendiente" de Euler o de Lagrange! Es una experiencia emocionante, ¿verdad?

<u>Complemento didáctico</u>

Para complementar este intento de viaje hacia los pilares de la Matemática, hemos considerado útil presentar algunos teoremas clásicos, todos muy básicos, que son conocidos y aplicados por cualquier estudiante que se inicia en el aprendizaje de las matemáticas a nivel universitario y en la resolución de problemas. Las conclusiones de esos teoremas son, en cierto modo, muy intuitivos pero pocos estudiantes conocen o recuerdan con precisión sus demostraciones. Hemos seleccionado 6 ejemplos de los importantes avances que lograron los grandes creadores durante los siglos XVII, XVIII y XIX para las funciones de R en R: Esos teoremas son tan importantes que han quedado grabados en la literatura matemática con el nombre de sus creadores:

1) **Teorema de Weierstrass (*) : "Los extremos superior e inferior de una función continua en un intervalo cerrado y acotado son respectivamente el máximo y el mínimo de la función en ese intervalo"**

Recordatorio :

- Se llama "extremo superior" E de un conjunto de números reales a la menor de las cotas superiores; es decir que para todo E'<E hay números x del conjunto que verifican x > E'
- Se llama "extremo inferiores" de un conjunto de reales a la mayor de las cotas inferior; es decir que para todo e'>e hay números x del conjunto que verifican x<e'
- Si E forma parte del conjunto, se le llama "máximo"
- Si e forma parte del conjunto, se le llama "mínimo"

Por ejemplo, en la sucesión 1 1/2 1/3 1/4…….: 1 es extremo superior, 0 es extremo inferior, 1 es máximo, no hay mínimo. Un conjunto acotado tiene siempre extremos pero no es forzoso que tenga máximo y mínimo.

(*)Karl WEIERSTRASS (1815-1897) nació en Ostenfeld (Alemania) , en el seno de una familia católica liberal. Trabajó fundamentalmente en la Universidad de Koenigsberg y en la de Berín. Su obra más importante es la teoría de las series de potencia.

Demostración del teorema:
Sea f(x) la función, continua en el intervalo cerrado [a,b] Mostremos por ejemplo que el extremo superior E de f(x) en ese intervalo es máximo de la misma.

Tomemos el valor E – 1; sabemos que existe $a_1 \in [a,b]$ tal que $f(a_1) > E - 1$. Tomemos E – (1/2); existe a_2 tal que $f(a_2 > E - (1/2)$. Así sucesivamente: $f(a_n) > E - (1/n)$
Formamos así una sucesión a_1 a_2 a_3 ……de [a,b].
Vamos a emplear un procedimiento que se llama "euclideano". Dividimos [a,b] en dos mitades; una por lo menos de esas dos mitades, por ejemplo la mitad izquierda contiene infinitos elementos de la sucesión a_n. Volvamos a dividir esa mitad en dos intervalos; por lo menos una de ellas contiene infinitos elementos de a_n ; volvemos a dividir, y así sucesivamente. Formamos así una sucesión de intervalos tales que en cada uno de ellos hay infinitos elementos de la sucesión a_n. En el primer intervalo, o sea [a,b], están todos los a_n; elijamos a_1 ; en el segundo encontramos por ejemplo el a_5; en el tercero por ejemplo el a_7, y así sucesivamente. Dado que los sucesivos intervalos tienen una longitud que tiende a 0, el extremo izquierdo y el derecho tienden a un número α y también a_1 a_5 a_7 ……… → α , por tratarse de una sucesión comprendida entre las dos sucesiones mencionadas (las de los extremos izquierdos y los derechos). Pero $\alpha \in$ [a,,b]. ; por ser f(x) continua, tendremos:

$$f(a_1) \quad f(a_5) \quad f(a_7) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \to f(\alpha) \qquad (1)$$

Por otra parte, sabemos que:

$$E - 1 < f(a_1) \leq E$$
$$E - (1/5) < f(a_5) \leq E$$
$$E - (1/7) < f(a_7) \leq E$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dado que las sucesiones de la izquierda y de la derecha tienen límite E, la sucesión comprendida también $\rightarrow$ E. Recordando (1), resulta entonces $f(\alpha) = E$. Por lo tanto E es accesible $\Rightarrow$ E es máximo de f(x) en [a,b]..
Dejamos al lector que retire una de las hipótesis, o sea que la función no sea continua, o que el intervalo no sea cerrado o que el intervalo no esté acotado, para verificar que la conclusión del teorema no es forzosamente válida. Sugerimos al lector idear gráficos muy simples para verificar el fracaso de la conclusión.

2) **Teorema de Bolzano (*)** **:"Si una función f(x) es continua en [a,b] y f(a), f(b) son de signo contrario, existe por lo menos un punto $c \in (a,b)$ tal que f(c) = 0. "**

Demostración :
Llamemos $[a_1 , b_1]$ al intervalo dado, suponiendo, para fijar ideas que $f(a_1)<0$ y $f(a_2)>0$.. Utilizaremos para la demostración el procedimiento euclideano empleado para probar el teorema de Weierstrass.
Partimos el intervalo por la mitad. En el medio, o bien el valor correspondiente de f(x) es nulo, en cuyo caso el teorema estaría demostrado, o bien tiene un signo; tomamos entonces una de esas dos mitades para la cual la función tiene signos contarios en los extremos, luego volvemos s partir el intervalo en cuestión en dos mitades y seleccionamos el medio intervalo con el mismo criterio (suponiendo que no

---

(*)Bernardo BOLZANO (1781-1848) nació en Praga (Checoeslovaquia) y, a pesar de sentirse checo toda su vida, sus orígenes no son checos (padre italiano, madre alemana). Fue un sacerdote cristiano que se destacó como teólogo, filósofo y matemático, autor en particular de "Las paradojas del infinito".

nos dio 0 en el medio, como antes). Seguimos así sucesivamente.
Obtenemos así una sucesión de intervalos cuya longitud tiende a 0 y son tales que en los extremos izquierdos es $f(x)<0$ y en los derechos es >0. Obtenemos así, con esos extremos, un par de sucesiones monótonas convergentes que definen un límite común $c \in (a,b)$; obviamente, la hipótesis de continuidad nos da, por lo dicho para los extremos izquierdos $f(c)\leq 0$ y por lo dicho para los derechos $f(c)\geq 0$. Se deduce $f(c) = 0$ y el teorema queda demostrado.

3) <u>Teorema de Darboux (*)</u> : "Si una función f(x) es continua en [a,b], toma en (a,b) todos los valores intermedios entre f(a) y f(b).

<u>Demostración</u> :
Este teorema es una generalización del teorema de Bolzano.
Sea m un valor tal que $f(a) < m < f(b)$, habiendo supuesto para fijar ideas, que $f(a)<f(b)$. Demostraremos que existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = m$..

Emplearemos la función $\varphi(x) = f(x) - m$., también continua. Siendo $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, le aplicamos el teorema de Bolzano: existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $\varphi(c) = 0$, o sea que $f(c) = m$.
Observación: En algún texto, se ha tomado la propiedad de Darboux para definir la continuidad, lo cual es erróneo pues existen funciones que tienen la propiedad de Darboux sin ser continuas . Toda función continua es darbouxiana pero **no toda función darbouxiana es continua.**

(*)*Gaston DARBOUX (1842-1917) naciió en Nîmes (Francia) y fue un distinguido matemática , que se destacó por sus trabajos sobre las ecuaciones en derivadas parciales*

4) **<u>Teorema de Rolle (*)</u> : "Si f(x) es continua en [a,b] y derivable en (a,b) y además es f(a) = f(b), existe al menos un c $\in$ (a,b) tal que f'(c) = 0 . "**

<u>Demostración</u> :

Siendo f(x) continua en [a,b], le es aplicable el teorema de Weierstrass y por lo tanto tendrá un máximo y un mínimo en el intervalo.

Si el máximo y el mínimo se producen en los extremos de [a,b], la hipótesis implica que la función es una constante en el intervalo. Entonces su derivada es nula en todo punto de (a,b).

Si en cambio no se producen ambos en los extremos, por lo menos uno de los dos tendrá lugar en un punto de (a,b); para fijar ideas, supongamos que se trate del máximo; ese máximo se producirá en algún punto de (a,b), que llamaremos c.

Para cualquier x de [a,b], tenemos:

$$f(c) \geq f(x),$$

o sea : $\Delta f = f(x) - f(c) \leq 0$

Se deduce que para $\Delta x > 0$, se tiene $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0$, mientras que para $\Delta x < 0$, será $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$. Pasando al límite para $\Delta x \to 0$, tendremos que por la izquierda el límite es ≤ 0 , mientras que por la derecha será ≥ 0. Siendo f(x) por hipótesis derivable en todo punto de (a,b), sólo podrá ser:

(*)Michel ROLLE (1652-1719) nació en aubert (Francia) y se dedicó especialmente a la teoría de ecuaciones en la cual encontró importantes resultados, entre los cuales se destaca el teorema que presentamos. También inventó la notación $\sqrt[n]{x}$ *para designar la raíz enésim.de x*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0 \Rightarrow$$ f'(c) = 0 , lo cual prueba la tesis.

---

5) <u>Teorema de Lagrange (*)</u>: "Si f(x) es continua en [a,b] y derivable en (a,b), existe c $\in$ (a,b) tal que f(b) – f(a) = f'(c)(b-a)".

<u>Demostración</u> : Hacemos $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = A$ y formamos la función auxiliar:

φ(x) = f(x) – f(a) – A(x-a)

Tenemos φ(a) = 0 y también, por la definición del número A, φ(b) = 0. Tenemos por lo tanto φ(a) = φ(b); además φ(x) es obviamente continua en [a,b] ya que es una suma de funciones continuas. Además φ(x) es derivable en (a,b); en efecto: si a partir de un punto x de (a,b), tomamos el incremento Δx, tenemos:

(*) "Lagrange es la alta pirámide de las ciencias matemáticas", dijo Napoleón Bonaparte acerca del más grande matemático del siglo XVIII., que supo conservar su notable modestia durante toda su vida.

Joseph-Louis LAGRANGE (1736-1813) nació en Torino (Francia) y se desempeñó, por decisión de Napoleón, como Senador, Conde del Imperio y Gran Oficial de la Legión de Honor. Su padre era un especulador incorregible y dilapidó toda la fortuna familiar. Más adelante, Lagrange consideraba ese desastre como la felicidad de su vida: "Si yo hubiera heredado una fortuna, probablemente no me hubría ocupado de matemáticas". Lagrange logró importantísimos avances en Análisis Matemático, dedicando además gran parte de su tiempo a la formación de los jóvenes ingenieros militares de Napoleón.

$\Delta\varphi = \Delta f - A\Delta x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\Delta \varphi}{\Delta x} = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} - A$

Pero como $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ tiene límite finito o infinito con signo cuando

$\Delta x \to 0$, también $\dfrac{\Delta \varphi}{\Delta x}$ tendrá límite finito o infinito con

$\Delta x \to 0$, también $\dfrac{\Delta \varphi}{\Delta x}$ tendrá límite finito o infinito con

signo $\Rightarrow$ $\varphi(x)$ es derivable en todo punto de (a,b).

La función $\varphi(x)$ satisface el teorema de Rolle ya que cumple con todas las hipótesis de dicho teorema. $\Rightarrow$ existe $c \in (a,b)$ tal que $\varphi'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - A = 0$ Recordando el valor de A, queda así demostrada la tesis.

Observaciones:

a) Siendo $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ la pendiente de la cuerda que une los dos puntos representativos de f(x) en x=a y x=b y f'(c) la pendiente de la tangente a la curva en el punto de abscisa c, resulta la siguiente interpretación geométrica del teorema de Lagrange : " En todo arco de la curva representativa de una función continua en un intervalo para el cual en cada punto hay una tangente única, siempre hay en el arco un punto cuya tangente es paralela a la cuerda".

b) El teorema de Lagrange es claramente una generalización del teorema de Rolle, siendo éste el correspondiente al caso f(a) = f(b) = 0. En el caso del teorema de Rolle, la cuerda es horizontal y un punto en que f’(c) = 0 produce una tangente también horizontal.

6) <u>Teorema de Cauchy</u> (*) “Si las funciones f(x), φ(x) son continuas en [a,b] y derivables en (a,b), siendo φ(a) ≠ φ(b) y además no se anulan ni se hacen infinitas simultáneamente las derivadas en todo punto de (a,b), existe por lo menos un valor c ∈ (a,b) tal que :

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$ “

<u>Demostración</u> :

Observemos ante todo que la idea apresurada de aplicar el teorema de Lagrange separadamente a las dos funciones para deducir la tesis de Cauchy no sería correcta, pues obtendríamos un c y un c’ y no tiene por qué ser c = c’.

Ponemos $\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=A$ y formamos la función auxiliar:

$$\Psi(x) = f(x) - f(a) - A[\varphi(x) - \varphi(a)]$$

Tenemos ψ(a) = 0, ψ(b) = 0 ⇒ ψ(a) = ψ(b). Además ψ(x) es continua en [a,b] por serlo f y φ.

(*) Augustin-Louis CAUCHY (1789-1857) nació en París (Francia), unas 6 semanas después de la toma de la Bastilla. Hijo entonces de la Revolución Francesa, estudió en el Instituto Politécnico y pasó luego al servicio de Napoleón, gran admirador de los genios matemáticos, siendo él mismo un gran aficionado a la Matemática. Entre los aportes de Cauchy a la Matemática moderna, se destacan dos innovaciones de interés superior: la primera fue la introducción del rigor en el análisis matemático y la segunda fue el Análisis Combinatorio, elaborando sistemáticamente las primeras bases de la Teoría de Grupos.,

Veamos también que ψ(x) es derivable en (a,b). Tomando un incremento Δx a partir de un punto de (a,b), tenemos:

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} - A\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$$

Entonces: $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} - A \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$$

Tenemos dos posibilidades:

a) f ' y φ ' finitas ⇒ ψ es diferenciable

b) f ' o φ ' infinita; para fijar ideas, supongamos que f ' = +∞; por hipótesis, φ' será finita pues f ' y φ 'no son infinitas simultáneamente ⇒ ψ' será también +∞ .

Por lo tanto , en todos los casos, ψ(x) será derivable en (a,b). (recordamos que una función es derivable en un punto si tiene derivada finita, o sea si es diferenciable, o bien si tiene derivada infinita con un único signo, o sea si el punto es de inflexión vertical).

En el intervalo considerado, ψ(x) cumple con todas las condiciones del teorema de Rolle y por lo tanto existe un c ∈ (a,b) tal que ψ '(c) = 0 , o sea f '(c) – Aφ' (c) = 0 .

Observamos que φ '(c) no puede ser 0 pues resultaría f ' (c) = 0 también y sabemos por hipótesis que f ' y φ ' no se anulan simultáneamente; podemos entonces despejar A:

$$A = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \ ,$$

con lo cual queda terminada nuestra demostración.

Observación : el teorema de Cauchy es una generalización del teorema de Lagrange, el cual resultaría del de Cauchy tomando $\varphi(x) = x$. En definitiva, el teorema de Cauchy implica el de Lagrange y el de Rolle.

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

PETERSEN, J.: "Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques", traducción al francés del danés, Paris, Gauthier-Villars, 1946.

AUTORES VARIOS ; “Grandes matemáticos”, Colección Investigación Ciencia, Prensa Científica S.A., Barcelona, 1995.

DUNHAM, W. : “Viaje a través de los genios”, Ediciones Pirámide, Madrid, 1993.

MORITZ, R.E. : “On Mathematics and mathematicians”, Dover, New York, 1958.

PAPPAS, Theoni : “Mathematical Scandals”, Wide Word Publishing, 1997

SINGH, S. : “El último teorema de Fermat”, Norma, Bogotá, 1999.

TAO, Terence – “Solving mathematical problems, a personal perspective”, Oxford, University Press, 2005.

El propósito de este libro es ofrecer al lector un conjunto de problemas matemáticos con los cuales se ha topado el autor durante su larga carrera docente. Para el amante de las matemáticas, se trata de una especie de juego intelectual, en el cual el lector podrá aplicar o verificar sus conocimientos y, por qué no, su astucia. Resolver un problema "difícil" es, en cierto modo, invocar fuerzas invisibles del alma.

En la primera parte del libro aparecen los enunciados de los problemas propuestos, pero no sus soluciones; así el lector no se verá tentado de observarlas y conseguir entonces alguna "pista". Se busca así desafiar a los lectores sin brindarles ninguna ayuda, exceptuando algunos consejos incluidos en el prefacio del libro. Las soluciones se encuentran todas en la segunda parte del libro. El autor no descarta que algún lector descubra soluciones más simples o más elegantes que las expuestas, lo cual quizás incremente la satisfacción o el orgullo de dicho lector.

¡¡Buena suerte en su tarea, amigo lector!!

ORT

Educando para la vida

www.ort.edu.uy

Julio 2009