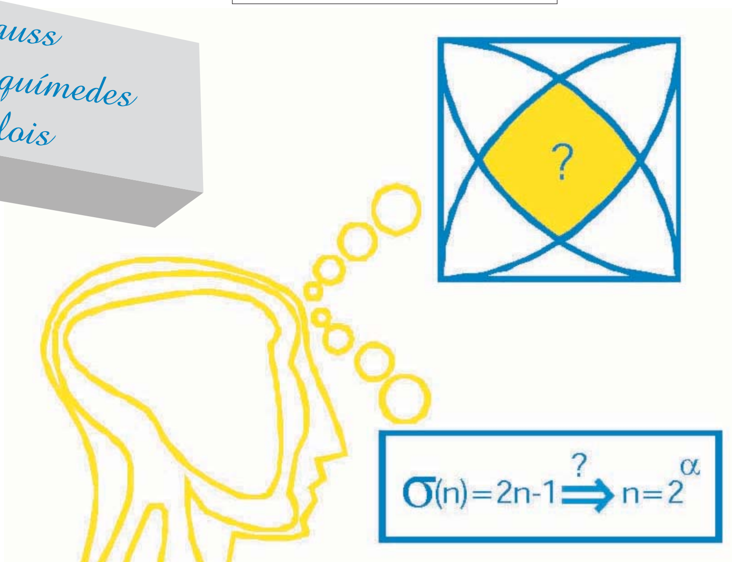
Isi Haim

Viajando por rincones matemáticos

Itinerario 2

Gauss
Arquímedes
Galois



e^r

$\alpha + \beta$

e^r

El enigma de Einstein

Las tres hijas de Juan

UNIVERSIDAD ORT
Uruguay

Ing. Isi HAIM

Profesor honorario de la Universidad de la República
(Facultad de Ingeniería), Montevideo, Uruguay.

Ex-Catedrático de Matemáticas en la Universidad ORT Uruguay
(Facultad de Ingeniería).

ISBN 978-9974-8130-1-4

Servicios Gráficos TARMA
Depósito Legal:

Setiembre 2008

PRÓLOGO

Cuando se me pidió que escribiera unas palabras sobre esta obra, sentí que se trataba de un gran desafío para mí, ya que no soy un matemático; pero lo cierto es que, al empezar a leerla, quedé atrapado por su forma y contenido. Realmente, como lo denomina nuestro querido profesor y catedrático Ing. Isi Haim, este libro es un apasionante "tour" que durante el recorrido invita a redescubrir estos rincones matemáticos.

A fines de la década del 90 llegó a mis manos el libro de "Geometrie mon amour" también del profesor Haim, que despertó en mí una tremenda nostalgia por aquella época de mi vida en que como estudiante de ingeniería y profesor de Matemática en Bachillerato disfrutaba del arte de aprender, resolver problemas y de enseñar. Confieso que no volví a sentir esa sensación hasta encontrarme con este segundo itinerario de la propuesta "Viajando por rincones matemáticos".

Este libro provocó en mí un profundo deseo de volver a aquella época en que tuve extraordinarios maestros tales como los profesores Forteza y Petracca, pero muy especialmente recuerdo aquellas clases del Profesor Haim que, por su ejemplo, claridad expositiva y didáctica, me hicieron dudar de mi vocación de ingeniero y pensar en la enseñanza de las matemáticas. Hoy, al recorrer este "tour", la sagacidad, la claridad y la didáctica de la exposición me recuerdan aquella etapa de mi vida.

El lector notará que las experiencias trasmitidas, los aportes de cómo enseñar Matemática, las notas históricas, el llamado a tomar conciencia del bajo nivel de los estudiantes que ingresan a las carreras de ingeniería y la fascinante claridad para exponer teoremas y sus aplicaciones, expresadas con sencillez y sutil didáctica, hacen que, al igual que en un "tour", nos sintamos atrapados por conocer la próxima "parada". Esto sólo lo logran trasmitir aquellas personas que hacen, del arte de resolver problemas y enseñar, la pasión de su vida.

Al finalizar la lectura de este libro y con una sonrisa (recordando el prefacio del profesor Haim) pensaremos que la "categórica afirmación" de la frase de Denis Poisson es un asunto serio.

Gracias Profesor Haim.

Ing. Mario Fernández Cítera
Decano, Facultad de Ingeniería.
Universidad ORT

ÍNDICE

PREFACIO

Al igual que mi anterior libro del mismo título ("Viajando por rincones matemáticos", que consistía en una especie de primer itinerario), éste trata de Matemática elemental (con algún tema quizás no tan elemental, sobre todo en el último capítulo del libro). El objetivo seguido en este "itinerario 2" es continuar exponiendo algunos aportes acerca de lo que ha sido para mí una pasión durante toda mi vida: la resolución de problemas y la enseñanza de esa disciplina a nivel universitario (fundamentalmente en los aspectos más básicos para alumnos que optaron por una carrera de Ingeniería).

Comparto con Adrián Paenza la idea que lo motivó para escribir su amena colección "Matemática…¿estás ahí?": la Matemática está a la vuelta de la esquina en nuestra vida cotidiana, esperando que la descubramos y que apliquemos nuestros modestos recursos a explorarla y a enseñarla. He ordenado mis ideas para exponer aspectos didácticos (cap.1), algunas notas históricas poco difundidas (cap.2) y para insistir sobre algunos problemas de Geometría (cap.3), disciplina que ha sido siempre para mí una verdadera obsesión. En los restantes capítulos, he aprovechado para proponer y resolver algunos problemas muy simples de Matemática, pero no por ello triviales. Existen en Matemática elemental infinitos problemas de enunciado muy simple pero que a menudo significan un verdadero desafío para matemáticos profesionales, aún para algunos de éstos con conocimientos muy avanzados. Expongo algunos de esos problemas y aprovecho para incluir algunos aportes personales relativos a planteos de esa naturaleza.

La lectura de este libro está destinada a estudiantes y docentes y, en general a personas que tienen conocimientos básicos de Cálculo, de Geometría y de Álgebra y que comparten conmigo el amor a esas disciplinas. A propósito de estos conceptos, no pude resistir a la tentación de incluir en la página siguiente una reflexión del célebre matemático francés Denis Poisson (siglo XVIII/XIX) que está íntimamente ligada a mi objetivo. La frase hará sonreir a muchos lectores a causa de lo categórico de la afirmación, pero debe tenerse en cuenta la fecha en que fue expresada, o sea en un tiempo en que el mundo no ofrecía todos los atractivos con los cuales convivimos en el mundo moderno.

Finalmente, señalamos al lector que los distintos capítulos incluidos en este libro son totalmente independientes entre sí , de modo que el lector podrá leerlos en el orden que prefiera o elegir únicamente los capítulos que puedan interesarle. Se trata simplemento, como el título lo indica, de "viajar" por algunos rincones de la Matemática.

Ing. Isi Haim **Montevideo, año 2008**

LA VIE EST BONNE SEULEMENT POUR DEUX CHOSES: DÉCOUVRIR DES MATHÉMATIQUES ET ENSEIGNER DES MATHÉMATIQUES

Denis Poisson
(1781-1840)

"La vida es buena únicamente por dos cosas: descubrir matemáticas y enseñar matemáticas"

<u>CAPÍTULO 1</u> – NOTAS DIDÁCTICAS

1.1- <u>Condiciones en que ingresan actualmente los alumnos a una Facultad de Ingeniería</u>

Son bien conocidas las carencias que presentan actualmente los alumnos al ingresar a una Facultad de Ingeniería de Uruguay. Conocemos el escaso nivel de suficiencia de los alumnos que ingresan por ejemplo a la Universidad de la República o a la Universidad ORT-Uruguay., con la intención de emprender una carrera de Ingeniería. Se han comprobado carencias muy graves, fundamentalmente a través de "diagnósticos" que se realizan en el momento del ingreso.

Para detectar esas carencias, se han propuesto pruebas (de múltiple opción) donde las preguntas realizadas corresponden a conocimientos imprescindibles que deberían poseer los estudiantes (para abordar seriamente los primeros cursos de Cálculo Diferencial e Integral o de Álgebra Lineal que figuran en el primer semestre de la carrera), al mismo tiempo que apuntan a comprobar su comprensión lectora.. La experiencia que se realiza año a año muestra que sólo muy pocos de los alumnos obtienen un resultado aceptable en la prueba propuesta. Esto nos ha obligado, por ejemplo en la Universidad ORT, a dictar cursos de nivelación para los alumnos de resultados insuficientes, a los efectos de ayudarlos un poco a no fracasar en los cursos curriculares iniciales. Esta situación parece agravarse año a año y constituye un importante problema en la educación universitaria inicial, problema que lamentablemente parece ser de carácter universal. Como consecuencia, se producen naturalmente graves situaciones de frustración y deserción en la masa estudiantil, al mismo tiempo que , a menudo sin advertirlo, los docentes se habitúan a atenuar la dificultad de los cursos y las exigencias en las pruebas y exámenes, siendo esa atenuación muy visible al efectuar comparaciones con el nivel exigido a generaciones pasadas.

No puedo dejar de mostrar algunos ejemplos de exámenes propuestos em nuestra enseñanza secundaria, no con el afán de crítica, sino para ilustrar mejor la gravedad de la situación. Certifico la autenticidad esos ejemplos por haber visto fotocopias de esas propuestas archivadas en bibliotecas liceales, a las cuales acceden innumerables alumnos:

- "Construir un triángulo ABC con los datos AB = 5 cm, ángulo A = 60º, ánngulo B = 120º " (2º año)
- " Hallar un polinomio que" (entre otros datos) "tiene dos raíces reales de signo contrario tales que una es el doble de la otra" (5º año)
- "Construir un triángulo de lados 5, 17 y 25 cm" (4º año)

Por supuesto, se trata de errores de distracción por parte de los docentes, pero mi opinión es que no se puede cometer ese tipo de error cuando se proponen pruebas evaluatorias.
Al ver esas “perlas”, siento que es menor mi indignación hacia la incompetencia de los “profesores” que la lástima que experimento por los alumnos; siento una profunda tristeza pensando en ellos. Realmente, resulta difícil reprocharles las malas condiciones en que ingresan a la Universidad. Es absolutamente imprescindible y urgente que las autoridades responsables tomen medidas acerca de esa lamentable situación.

A título de ejemplos, mostramos las pruebas “diagnóstico” realizadas en los años 2003 y 2005 en el ingreso a la Universidad ORT, donde se ve claramente que las preguntas realizadas deberían ser contestadas correctamente por un alumno que hubiera obtenido una formación razonable en sus años de enseñanza secundaria, opción científica. En la prueba del año 2003, las preguntas se refieren preferentemente a los conocimientos básicos que se esperan del alumno, mientras que la prueba del año 2005, vista la falta de conocimientos específicos en Matemática detectada en años anteriores, se buscó más bien comprobar aptitudes, capacidad de concentración y comprensión lectora. En ambas ocasiones, el porcentaje de resultados aceptables no superó el 20% de los alumnos: fue 19% en el año 2003 y 10% en año 2005.

La prueba consistió en proponer 25 preguntas de múltiple opción, donde se indican, para cada pregunta, 5 respuestas posibles de las cuales una y sólo una es correcta. Para evitar respuestas al azar, se penalizó con puntaje negativo las preguntas mal contestadas mientras que la pregunta no contestada obtenía un puntaje nulo.

Mostramos los cuestionarios correspondientes para que los lectores puedan apreciar la sencillez de las pruebas propuestas.

Prueba propuesta en el año 2003

1- Sea Q un cuadrilátero y α uno de sus ángulos. Elegir la proposición correcta:

a) Si Q es un rectángulo, entonces α no es recto.
b) Si Q no es un rectángulo, entonces α es recto.
c) Si Q no es un rectángulo, entonces α no es recto.
d) Si α es recto, entonces Q es un rectángulo.
e) Si α no es recto, entonces Q no es un rectángulo.

2- Una relación binaria R en un conjunto A es de "equivalencia" si y sólo si es reflexiva, simétrica y transitiva, o sea, indicando con minúsculas a elementos cualesquiera de A:

Reflexiva: aRa

Simétrica: aRb $\Rightarrow$ bRa

Transitiva: $\left.\begin{matrix} aRb \\ bRc \end{matrix}\right\} \Rightarrow aRc$

Decir cual de estas relaciones **<u>no</u>** es de equivalencia:

a) "Tener igual radio que" en el conjunto de los círculos del plano.
b) "Tener igual área que" en el conjunto de los triángulos del plano.
c) "Ser primo con" en el conjunto de los enteros positivos.
d) "Tener el mismo color que" en un conjunto de fichas de juego
e) "Tener la misma madre que" en el conjunto de los seres humanos.

3- Si x, y, z, a, b, c son reales positivos tales que:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} ,$$

entonces $\dfrac{x+y+z}{a+b+c}$ es igual a:

a) $\dfrac{z}{c}$; b) $\dfrac{a}{b}$; c) $\dfrac{x}{y}$; d) 1 ; e) 3

4- Designando con "log" al logaritmo real en determinada base real B (B > 0 , B ≠ 1), si log2 = a, log3 = b, log5 = c, hallar (log3600 – log6) en función de a, b. c ::

a) a+b+c ; b) 4a+2b+2c ; c) 2a+b+c ; d) 3a+b+2c ; e) ninguno de ellos

5- Se sabe que al dividir un cierto polinomio P(x) por (x-2)el resto obtenido es 5.

¿Cuánto vale P(2)?

a) 0 ; b) 2 ; c) 5 ; d) 1 ; e) no puede determinarse con ese único dato.

6- ¿ Cuantos grupos de 3 alumnos pueden formarse en una clase de 10 alumnos para representar a dicha clase?

a) 30 ; b) 50 ; c) 10 ; d) 70 ; e) ninguno de esos números

7- ¿Cuáles de los siguientes números son iguales?

I) $\text{sen}136^0$ II) $\cos 46^0$ III) $\cos 134^o$

a) no hay dos iguales;
b) sólo I y II son iguales
c) sólo II y III son iguales
d) sólo I y III son iguales
e) los tres son iguales

8- ¿Cuál de los números siguientes es raíz de la ecuación $x^3 + 3x^2 - 3x - 5 = 0$, siendo x una incógnita real?

a) 1 ; b) $\sqrt{6} - 1$; c) $\sqrt{2} + 1$; d) $-\sqrt{2}$; e) ninguno de ellos

9- Siendo x una variable real, la solución de la inecuación $(x-2)(x^2 - 4x + 3) < 0$ es:

a) $x<1$; b) $2<x<3$; c) $x<2, x>3$; d) $x<1$, $2<x<3$; e) $1<x<3$

10- Sea C un círculo y Q un cuadrado inscripto en él. La razón $\dfrac{\text{área}\, Q}{\text{área}\, C}$ es:

a) $2/\pi$; b) $\pi/4$; c) $3/\pi$; d) ¾ ; e) ninguna de ellas

11- Los ángulos de un cierto triángulo ABC, medidos en grados, son los siguientes:

$$\hat{A} = 3x + 4 \qquad \hat{B} = 2x + 8 \qquad \hat{C} = 5x - 32 ,$$

donde x es una cierta incógnita, también medida en grados. La medida en grados del menor de los tres ángulos del triángulo es:

a) 14 ; b) 20 ; c) 24 ; d) 48 ; e) ninguna de ellas

12- Dada la parábola $y = x^2 + 2x - 3$, las coordenadas de su vértice son:

a) (0,-3) ; b) (-1,-4) ; c) (1,0) ; d) (-3,0) ; e) ninguno de esos pares

13- Siendo $1<x<4$, se considera el arco de curva $y = x^3$. ¿Para qué valor de x la tangente al arco es paralela a la cuerda que une los extremos de dicho arco?

a) 3 ; b) 5/2 ; c) $\sqrt[3]{2}$; d) $\sqrt{7}$; e) ninguno de ellos

14- Sean $f(x) = e^x$, $g(x) = \cos(\pi x)$. $h(x) = Lx$. Evaluar $f(g(x))\,.\,g(h(x))$ para $x=1$:

a) 1 ; b) π ; c) -1 ; d) $-\dfrac{1}{e}$; e) $\dfrac{1}{e}$

15- Sea f(x) una función que es derivable dos veces en x=a y presenta en ese punto un máximo relativo. Puede afirmarse que:

a) $f'(a) < 0$; b) $f'(a) \neq 0$; c) $f''(a) \leq 0$; d) $f''(a) > 0$; e) ninguna de ellas

16- Si $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$, entonces $g(f(x))$ es:

a) 2^{2x} ; b) x^{2^x} ; c) 2^{2^x} ; d) x^{2x} ; e) 2^{x^2}

17- Sean las funciones de R en R: $f(x) = e^x - e^{-x}$, $g(x) = x^6 - 4x^2 + |x|$.

Indicar cual de estas proposiciones es cierta:

a) f(x) y g(x) son ambas pares;
b) f(x) es par y g(x) es impar;
c) f(x) es impar y g(x) es par;
d) f(x) y g(x) son ambas impares;
e) ninguna de las anteriores es cierta.

18- Si $f(x) = |x^3|$, el valor de $f'(-1)$ es :

a) 3 ; b) -3 ; c) -1 ; d) 1 ; e) no existe

19- Si u y v son funciones derivables de x, con $v \neq 0$, la derivada de $\dfrac{u}{v^2}$ con respecto a x es:

a) $2\dfrac{u'}{v'}$; b) $\dfrac{u'}{v^4}$; c) $-\dfrac{uv'}{v^4}$; d) $\dfrac{vu' - 2uv'}{v^3}$; e) $\dfrac{vu' + 2uv'}{v^3}$

20- Una y sólo una de las ecuaciones que siguen es la ecuación de una circunferencia real en un sistema cartesiano ortogonal. Indicarla:

a) $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 4 = 0$
b) $x^2 + x + 2y + 10 = 0$
c) $x^2 + y^2 + xy + 1 = 0$
d) $x^3 + y^3 - 8 = 0$
e) $x + y + x^2 + 1 = 0$

21- ¿Cuál de estas ecuaciones corresponde a la recta que pasa por (1,6) y tiene pendiente 1/7 , en un sistema cartesiano ortogonal?

a) x-7y = -39 ; b) 7y-x = 30 ; c) 7x-y = 1 ; d) 7x+y = 13 ; e) ninguna

22- El paralelogramo ABCD tiene vértices A(1,1), B(3,2) , C(4,5) en el plano cartesiano. El vértice D es entonces:

a) (2,4) ; b) (3,1) ; c) (5,3) ; d) (4,2) ; e) ninguno de ellos

23- Dada la recta x+2y+1 = 0, elegir la pareja (A,B) de puntos de modo que la recta AB le sea perpendicular (sistema de referencia ortogonal en el plano):

a) A(1,0); B(0,1) b) A(2,4); B(3,6)
c) A(-2,1); B(1,-2) d) A(2,-1); B(-1,2) e) A(2,2); B(1,1)

24- La pendiente de la recta que pasa por los puntos ((0,2) y (-1,0), dados en un sistema ortogonal, vale:

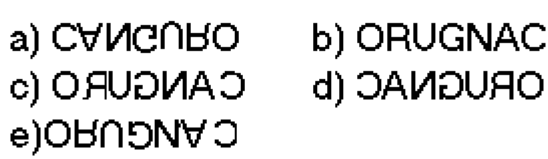
a) $\sqrt{3}$; b) 2 ; c) $\sqrt{2}$; d) -1 ; e) ninguna de ellas

25- La distancia del origen a la recta $x + y\sqrt{3} = 3$, dada en un sistema ortogonal, vale:

a) 3 ; b) 3/2 ; c) 1 ; d) $\sqrt{3}$; e) 2

Prueba propuesta en el año 2005

1- Francisco ganó una remera que tiene la palabra **CANGURO** escrita en la parte delantera. Si se mira en el espejo, ¿qué ve?



2- El tercio de la mitad del noveno de 1998 vale:

a) 14 b) 21 c) 27 d) 28 e) 37

3- La cola de un ratón mide 14 cm más que la mitad de esa cola. ¿Cuántos centímetros mide la cola de ese ratón?
a) 21 b) 14 c) 28 d) 30 e) 35

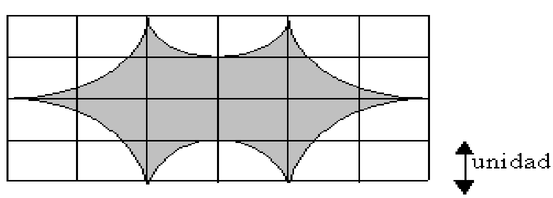
4- La pendiente de la recta de ecuación $\frac{x}{5}+\frac{y}{7}=1$ es igual a:

a) $-\frac{7}{5}$ b) 12 c) $\frac{7}{5}$ d) $-\frac{5}{7}$ e) 35

5- Hallar el ángulo formado por las agujas de un reloj que está indicando 9h 20min.
a) 140º b) 150º c) 160º d) 165º e) 170º

6- Se mezclan dos jugos de fruta. El primero, del que se tiene 2 litros, contiene 10% de azúcar; el segundo, del que se tiene 3 litros, contiene 15% de azúcar. ¿Cuál es el porcentaje de azúcar en los 5 litros de jugo de fruta obtenido después de la mezcla?
a) 25 % b) 12,75 % c) 12,5 % d) 13 % e) 5 %

7- ¿Cuál es el área de la superficie sombreada (limitada por arcos circulares centrados en el borde)? Todas las divisiones son de una unidad.



a) 24 - 4π ; b) π ; c) 24 - 5π ; d) 4 + π ; e) 2π + 2

8- Un mástil de 3 metros y un mástil de 6 metros se colocan verticalmente sobre un terreno horizontal y liso. Dos cuerdas fijas ligan el punto más alto de cada mástil con el punto más bajo del otro. ¿A qué altura se encuentra el punto de intersección de las dos cuerdas?

a) 1,5 m b) $\sqrt{3}$ m c) 2 m d) 1,25 m

e) eso depende de la distancia entre los dos mástiles

9- X e Y son números de 3 cifras. Las cifras de X son 1, 2 y 3 (escritas en un cierto orden) y las de Y son 4, 5 y 6 (también escritas en un cierto orden). Se sabe que X + Y es par y que la segunda cifra de X es 2. ¿Cuál es la última cifra del producto X.Y?

a) 2 b) 5 c) 4 d) 6 e) no puede contestarse con certeza

10- Los 7 enanitos son dispuestos por Blanca Nieve en una fila ordenada según la altura creciente de los enanos. Ella reparte entre ellos 707 manzanas. Sirve primero al más pequeño de los enanos y luego cada enano recibe una manzana más que las que recibe el enano que lo precede. ¿Cuantas manzanas recibirá el más alto de los enanos?

a) 107 b) 105 c) 104 d) 101 e) 98

11- Sean A, B, C tres puntos no alineados. En el plano de esos puntos, sea r una recta tal que A, B, C están a igual distancia de r. ¿Cuántas rectas r hay?

a) 0 b) 6 c) 9 d) 3 e) infinitas

12- El número que se escribe $a * b$ designa al mayor de los dos números (2a) y (a + b). ¿Cuál es el número (2*3)*(3*2)?

a) 9 b) 10 c) 11 d) 12 e) 13

13- Se escribe a continuación una sucesión de 6 desigualdades escritas por un alumno, con una conclusión obviamente falsa:

$$\underset{(1)}{x > 3} \Rightarrow \underset{(2)}{3x > 9} \Rightarrow \underset{(3)}{3x - x^2 > 9 - x^2} \Rightarrow \underset{(4)}{x(3-x) > (3+x)(3-x)} \Rightarrow$$

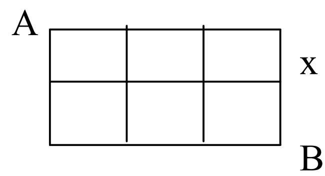
$$\Rightarrow \underset{(5)}{x > 3 + x} \Rightarrow \underset{(6)}{0 > 3}$$

¿Dónde está el error?

a) pasando de (1) a (2)   b) pasando de (2) a (3)
c) pasando de (3) a (4)   d) pasando de (4) a (5)
e) pasando de (5) a (6)

14- Pablo va de A a B sobre la red de la figura. Él solamente puede marchar de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha. ¿Cuántos de esos caminos pasan por el punto X?

a) 4 b) 6 c) 8 d) 9 e) 10



15- Si se aumenta en 30 km/h la velocidad de un cierto tren, se gana 1 hora sobre el trayecto. En cambio, si se disminuye la velocidad en 30 km/h, se pierden 2 horas. ¿Cuál es el largo del trayecto?

a) 90 km b) 180 km c) 360 km d) 720 km e) no se puede deducir

16- En un cierto triángulo rectángulo, el radio del círculo inscripto es 2 y el radio del círculo circunscripto es 6,5. ¿Cuál es el perímetro del triángulo?

a) 29 b) 30 c) 31 d) 32 e) 36

17- El número positivo Φ que satisface $\Phi^2 = \Phi + 1$ se llama “número áureo”. ¿Cuál de estos resultados es válido para evaluar Φ^5 ?

a) $3\Phi + 1$ b) $4\Phi + 2$ c) $5\Phi + 3$ d) $6\Phi + 4$ e) $7\Phi + 5$

18- Sobre una esfera de madera de radio 1, se traza una circunferencia con un compás de abertura 1. ¿Cuál es la longitud de esa circunferencia?

a) π b) $\frac{3\pi}{2}$ c) $\pi\sqrt{3}$ d) 2π e) $2\pi\sqrt{3}$

19- ¿Cuántas “palabras” (con o sin sentido) pueden formarse empleando las siete letras de la palabra “CANGURO” si solamente se permiten las “palabras” en las que las vocales y las consonantes están alternadas? (la propia palabra “CANGURO” no satisface esta condición)

a) 24 b) 30 c) 36 d) 120 e) 144

20- Si se divide el número positivo N en dos sumandos no negativos, el valor máximo del producto de esos dos sumandos es

a) $\frac{N^2}{8}$ b) $\frac{N^2}{4}$ c) $\frac{N^2}{2}$ d) N^2 e) ninguno de ellos

21- Siendo n natural (n = 1,2,3,……), se sabe que $\frac{2n}{n+1}$ es creciente con n y que, para $n\to+\infty$, se tiene $\lim \frac{2n}{n+1} = 2$. ¿A partir de qué valor N de la variable n se tiene $2 - \frac{2n}{n+1} < 0{,}001$?

a) 199 b) 200 c) 201 d) 202 e) 203

22- Sea la función de R en R definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & para \;\; x \neq 3 \\ A & para \;\; x = 3 \end{cases}$$

¿Qué valor debe tener A para que f(x) sea continua en todo el campo real?

a) –3 b) 0 c) 3 d) 6 e) 9

23- Para $x\to2^+$, $\lim e^{\frac{1}{2-x}}$ es:

a) $-\infty$ b) 0 c) 1 d) e e) $+\infty$

24- La derivada de la función $f(x) = e^{e^{2x}-1}$ en el punto x = 0 vale:

a) 3 b) 2 c) 1 d) 0 e) ninguna de ellas

25- El mínimo absoluto de la función $(3x - x^3)$ en el intervalo cerrado $\left[-\frac{3}{2}, 3\right]$ vale: a) –2 b) –1 c) 1 d) 2 e) ninguno de ellos

1.2- Conceptos básicos de funciones de R en R para ingreso a la Universidad

Continuando con lo expresado en el párrafo **1.1**, hemos considerado oportuno incluir en estas notas didácticas conceptos que se consideran básicos para ingresar a la Universidad y, en particular, para poder asimilar correctamente las enseñanzas del primer curso de Cálculo Diferencial e Integral. No incluimos naturalmente las demostraciones de los teoremas clásicos sobre funciones de R en R (Rolle, Bolzano, Lagrange, etc.) ya que éstas se encuentran fácilmente en los textos conocidos.

El alumno que ingresa a la Universidad debería conocer y manejar fluidamente los temas que se encuentran en esta publicación.

Dadas las carencias en ese sentido que se han constatado en general en los alumnos que comienzan sus estudios de Ingeniería (a través de diagnósticos realizados al inicio de los cursos), se recomienda especialmente a los estudiantes leer estas páginas con atención y dedicación, de manera de poder abordar adecuadamente los cursos de Matemáticas que se les brindarán en la Universidad.

TÓPICOS INCLUIDOS PARA FUNCIONES DE R EN R

TÓPICO I - CONTINUIDAD

Definición : $f(x)$ continua en a

1ª definición $\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

2ª definición $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0: \exists\delta>0 \ / \ |x-a|< \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$

3ª definición $\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0} [f(a+\Delta x) - f(a)] = 0$, o sea que si el incremento de la variable tomado a partir de **a** tiende a 0, también tiende a 0 el incremento correspondiente de la función.

Es fácil comprobar la equivalencia entre las 3 definiciones. Observemos que la forma más usual de la definición de continuidad es la primera; el lector debe tener especialmente en cuenta que esa definición contiene implícitamente tres afirmaciones, de las cuales las dos primeras deben verificarse cuidadosamente antes de comprobar la igualdad:

1) Existe $f(a)$
2) Existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y es finito
3) Los dos valores son iguales.

Por supuesto, si se toman límites sólo laterales, puede definirse la continuidad lateral; por ejemplo, por la derecha:

$f(x)$ continua en a^+

$\Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0: \exists\delta>0 \ / \ (x\geq a \ \text{ y } \ x-a < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0^+} [f(a+\Delta x) - f(a)] = 0$

DEL PUNTO DE VISTA GRÁFICO, la representación de una función continua en **a** puede dibujarse alrededor de **a** sin levantar el lápiz.

Tipos de discontinuidad

1) <u>Discontinuidad evitable</u> :

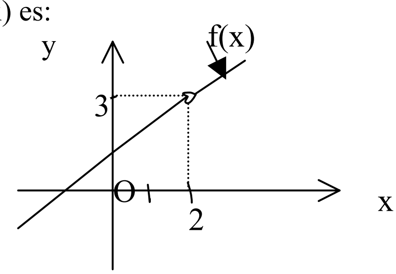
Ocurre en **a** cuando no existe f(a) pero existe y es finito $\lim_{x\to a} f(x) = \lambda$ (o sea que existen los dos límites laterales y son finitos e iguales). La discontinuidad se llama "evitable" porque si se completa la definición de la función dando a f(a) el valor λ del límite en a, la función resulta continua. Veremos que en los otros casos de discontinuidad, resulta imposible "evitar" la discontinuidad.

<u>Ejemplo</u> : $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ en el punto x = 2

Vemos que f(2) no existe pero existe $\lim_{x\to 2} f(x)$:

Para x ≠ 2 : $\dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \dfrac{(x+1)(x-2)}{x-2} = x + 1 \to 3 \quad cuando \quad x \to 2$

El gráfico de y = f(x) es:



Se trata de la recta con un "hueco" en el punto x = 2. Si se completa la definición así:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & para \quad x \neq 2 \\ 3 & para \quad x = 2 \end{cases} ,$$

la función resulta continua en el punto.

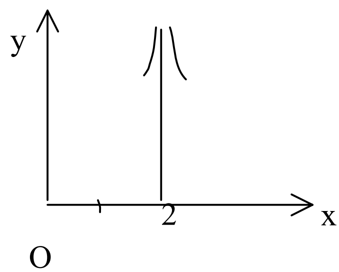
2) <u>Discontinuidad infinita</u> :

Ocurre en **a** cuando, a pesar de existir ambos límites laterales, por lo menos uno de ellos es infinito (+∞ o -∞).

Ejemplo 1 : Los dos límites laterales son iguales, pero ambos son infinitos

$$f(x) = \frac{x}{(x-2)^2} \qquad en \quad x = 2$$

Tenemos $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$, con el siguiente gráfico alrededor del punto:



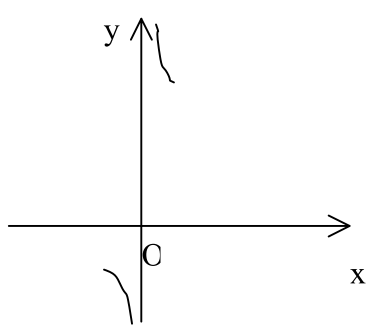
Aunque se complete la definición de f(x) dando un valor a f(2), la discontinuidad no puede evitarse, por ninguno de los dos lados.

Ejemplo 2 : Los dos límites laterales existen, pero son infinitos de distinto signo

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{en} \quad x = 0$$

Tenemos $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ $\qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

El gráfico alrededor del punto es:

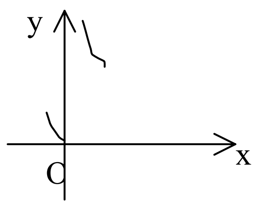


La discontinuidad es inevitable por ambos lados.

Ejemplo 3 : Un límite lateral es finito y el otro es infinito; no existe límite en el punto

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad \text{en} \quad x = 0$$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$



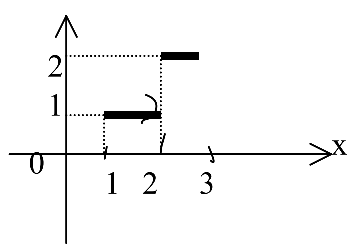
La discontinuidad es evitable en 0^- haciendo f(0) = 0 pero no es evitable en 0.

3) Discontinuidad de primera especie

Ocurre en **a** cuando existen ambos límites laterales, son finitos pero son distintos. La función podría ser continua por un lado pero no en el punto.

Ejemplo : $E(x) = n$ para $n \leq x < n+1$, con $n \in N$

Por ejemplo, en x = 2:



$\lim_{x\to 2^-} E(x) = 1$ $\qquad$ $\lim_{x\to 2^+} E(x) = 2$

La función es sólo continua en 2^+ ya que E(2) = 2.

Este tipo de discontinuidad es muy importante en aplicaciones matemáticas o físicas (funciones continuas " a trazos" o "seccionalmente continuas", que se consideran en Cálculo Integral, en el estudio de las series de Fourier, etc.)

4) **Discontinuidad de segunda especie**

Ocurre en **a** cuando por lo menos uno de los dos límites laterales no existe.

Ejemplo : $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ en $x = 0$

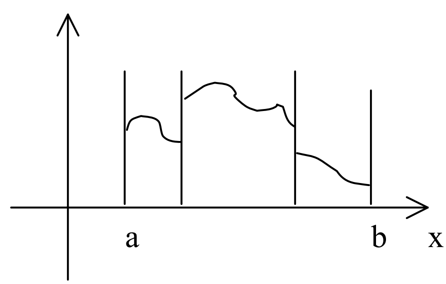
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ no existe

Continuidad en un intervalo

Se dice que f(x) es **continua en el intervalo I** si y sólo si es continua en cada uno de los puntos de I (si I es finito, en los extremos de I es suficiente la continuidad lateral).
Cuando I es finito con extremos a,b:

- f(x) es continua en [a,b] sii lo es en todo x tal que $a<x<b$ y en a^+ y b^-
- f(x es continua en [a,b) sii lo es en todo x interior y en a^+
- f(x) es continua en (a,b) sii lo es en todo x tal que $a<x<b$

Una función f(x) es **seccionalmente continua** o **continua a trazos** en un intervalo I si sólo presenta un número finito de puntos de discontinuidad en I, siendo de primera especie esas discontinuidades:



El gráfico correspondería a una función seccionalmente continua en (a,b).

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

Principales teoremas sobre funciones continuas

Definiciones previas .
Sea C un conjunto numérico.

- Se dice que C está acotado superiormente cuando existe un número k tal que $\forall x \in C$: $x \leq k$. En tal caso, se dice que k es una cota superior de C.
- Se dice que C está acotado inferiormente cuando existe un número k tal que

$\forall x \in C: x \geq k$. En tal caso, se dice que k es una cota inferior de C.

- Si C es acotado superiormente, se llama extremo superior E de C a la menor de las cotas superiores; es decir que para todo $E' < E$, hay números de C que verifican $x > E'$
- Si C es acotado inferiormente, se llama extremo inferior e de C a la mayor de las cotas inferiores; es decir que para todo $e' > e$, hay números de C que verifican $x < e'$
- Si C es acotado superiormente, su extremo superior E se llama máximo de C cuando $E \in C$
- Si C es acotado inferiormente, su extremo inferior e se llama mínimo de C cuando $e \in C$

Ejemplo :
Consideremos la sucesión siguiente, que está acotada superior e inferiormente:

1 1/2 1/3 1/4 1/5 ………………

1 es extremo superior
0 es extremo inferior
1 es máximo del conjunto
No hay mínimo

Teorema I : Una función continua en un intervalo cerrado y acotado es acotada.

Teorema II : (Weierstrass) Una función continua en un intervalo cerrado y acotado tiene en ese intervalo un máximo y un mínimo.
(es decir que los extremos superior e inferior de la función en ese intervalo son respectivamente máximo y mínimo)

Teorema III : (Bolzano) Si una función f(x) es continua en un intervalo cerrado [a,b] y f(a) y f(b) son de signo contrario, existe por lo menos un punto c interior a (a,b) tal que f(c) = 0.

Teorema IV : (Darboux) (generalización del teorema de Bolzano)
Si f(x) es continua en [a,b], toma todos los valores comprendidos entre f(a) y f(b) en ese intervalo.

Las demostraciones de esos teoremas pueden consultarse en los textos de Análisis Matemático pero es importante de todos modos conocer las propiedades que esos teoremas establecen.

TÓPICO II - LÍMITES Y VARIABLES EQUIVALENTES

Suponemos que el lector conoce las definiciones de límites para funciones de R en R (tanto límites finitos como infinitos) y que se han estudiado las operaciones básicas con límites.

Para el cálculo de límites, es conocido que existen 7 casos de indeterminación, que se simbolizan así:

$$+\infty-\infty \qquad \mathbf{0.}\infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \mathbf{1}^{\infty} \qquad \mathbf{0}^{\mathbf{0}} \qquad \infty^{\mathbf{0}} \quad ,$$

entendiéndose que los símbolos usados corresponden a límites (en particular en 1^{∞}, no se trata de la constante 1 sino de una variable cuyo límite es 1; en el caso de un 1 fijo, la operación 1^{∞} no es indeterminada ya que 1^{u} con $u \to \infty$ tiene el límite 1: $1^{u} = 1 \to 1$).

La forma más eficiente para abordar el cálculo de un límite que se presenta como indeterminado es emplear la teoría de las variables equivalentes, que desarrollaremos aquí en detalle.

<u>Variables equivalentes</u>:

<u>Definición</u> : Sean u(x) y v(x) dos funciones de R en R, no idénticamente nulas. Decimos que u es "equivalente" a v para x tendiendo a **a** (**a** finito o infinito) si y sólo si el límite de u sobre v para $x \to a$ vale 1, o sea:

$$\boxed{u \sim v \quad \text{para } x \to a \iff \lim_{x\to a} \frac{u}{v} = 1}$$

Se trata de una relación de equivalencia en el sentido algebraico clásico. En efecto:

- <u>propiedad idéntica</u> : $u \sim u$ pues $\frac{u}{u} = 1 \to 1$
- <u>propiedad recíproca</u> : $u \sim v \Rightarrow v \sim u$

En efecto: $\frac{v}{u} = \frac{1}{\frac{u}{v}} \to 1$, con $\frac{u}{v} \to 1$

- propiedad transitiva :

$$\left.\begin{array}{l} u \sim v \\ v \sim w \end{array}\right\} \Rightarrow u \sim w$$

En efecto: $\frac{u}{w} = \frac{u}{v}\frac{v}{w} \to 1$ ya que ambos cocientes tienden a 1

Propiedad fundamental : Toda variable u(x) que tiene límite finito y no nulo para $x \to a$ (finito o infinito) es equivalente a su límite.
En efecto, siendo lím $u = \lambda \neq 0$:

$$\frac{u}{\lambda} \to 1$$

Equivalencias básicas :

① $\operatorname{sen}x \sim \operatorname{tg}x \sim x \sim \operatorname{Arcsen}x \sim \operatorname{Arctg}x$ para $x \to 0$

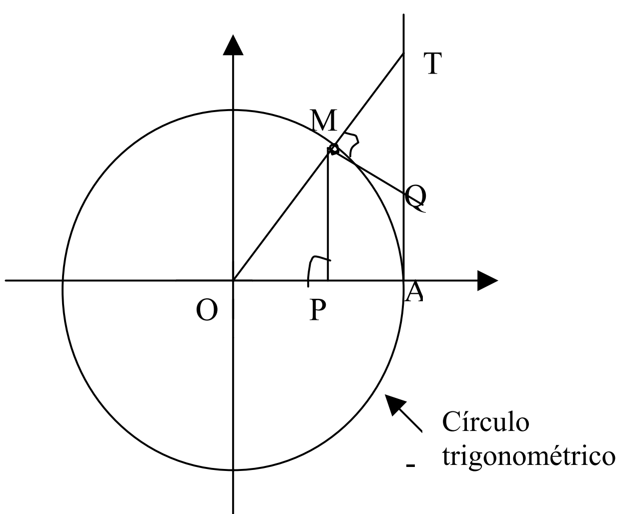
② $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ para $x \to 0$

③ $Lx \sim x - 1$ para $x \to 1$

④ $a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n \sim a_o x^n$ $(a_o \neq 0)$ para $x \to +\infty$ o para $x \to -\infty$

Demostraciones de las equivalencias básicas

①



$\overline{PM} = \operatorname{sen} x$

$arco\, AM = x$

Si x > 0:

$$\overline{PM} < AM < arcoAM < AQ + QM < AQ + QT = \overline{AT}$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{senx} & \text{x} & \text{<QT} & \text{tgx} \end{array}$$

de modo que senx < x < tgx $\Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{1} < \frac{x}{senx} < \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\frac{1}{\cos x}} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$,

y entonces, cuando x $\to 0^+$, resulta <u>x ~ senx</u>

Si x<0, análogamente senx>x>tgx $\Rightarrow 1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1 \Rightarrow$ x~senx

Resulta pues: senx ~ x para x→0

Se deduce: $\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x \cos x} \to 1$ para x→0 , o sea tgx ~ x para x→0.

La consecuencia para las funciones trigonométricas inversas es inmediata.

② $1 - \cos x = 1 - (1 - 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}) = 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$

Entonces $\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \frac{2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \to 1$ para x→0

③ Hacemos $x - 1 = y \to 0$

$$\frac{Lx}{x-1} = \frac{L(1+y)}{y} = L\Big[\underbrace{(1+y)^{\frac{1}{y}}}_{e}\Big] \to Le = 1$$

④ $$\frac{a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_n}{a_o x^n} = 1 + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{a_1}{a_0 x}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{a_2}{a_o x^2}} + \dots\dots\dots + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{a_n}{a_o x^n}} \to 1$$

"Un polinomio es equivalente a su término de mayor grado cuando la variable tiende a ∞"

Observación : Las equivalencias básicas enunciadas deben leerse con total generalidad para aplicarlas eficientemente en el cálculo de límites. Por ejemplo, la ③ debe leerse: **"el logaritmo de una variable que tiende a 1 es equivalente a la variable menos 1"**; esa variable puede ser una función más compleja que la simple función x; aclaramos la idea de esta manera:

Para $x \to 2$: $L(x^2+4x-11) \sim x^2+4x-12$, ya que la variable $x^2+4x-11$ tiende a 1.

Propiedades fundamentales :

1) **Si u ~ v y una de ellas tiene límite, la otra también lo tiene y su límite es el mismo.**

Demostración : Supongamos que v tiene límite.

Si u no tuviera límite, $\frac{u}{v}$ no tendría límite; contradicción pues $\frac{u}{v} \to 1$.

Teniendo u límite, distinguimos 2 casos:

1^er^ caso : límv = 0

Siendo u~v, también v~u y por lo tanto $\text{lím}\frac{v}{u} = 1$. Si fuera límu ≠ 0,

tendríamos $\text{lím}\frac{v}{u} = \frac{\text{lím}\, v}{\text{lím}\, u} = 0$ (contradicción). Luego límu = 0 ⇒ límu=límv

2º caso : límv ≠ 0

Si fuera límu=0, tendríamos $\text{lím}\frac{u}{v} = \frac{\text{lím}\, u}{\text{lím}\, v} = 0$, contradicción. Debe ser entonces

límu≠0. . Pero siendo $\text{lím}\frac{u}{v} = 1$, resulta $\frac{\text{lím}\, u}{\text{lím}\, v} = 1$ ⇒ lím u = lím v

2) **Si u ~ v y w no es idénticamente nula, entonces uw ~ vw.**

En efecto $\frac{uw}{vw} = \frac{u}{v} \to 1$

Por la propiedad (1), resulta entonces que para hallar el límte de uw, podemos hallar el límite de vw . Se deduce: **<u>En una expresión que tiene límite, todo factor puede reemplazarse por un equivalente a los efectos de encontrar ese límite.</u>**

3) **Si u ~ v y w no es idénticamente nula, entonces $\frac{w}{u} \sim \frac{w}{v}$.**

También puede hacerse el reemplazo para una variable que figura como divisor.

<u>Ejemplos</u> : Hallar los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{tg} x}{5\operatorname{sen}^3 x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4 - 1}{x^{10} - 1}$; c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{Lx}{x^3 - 1}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$ con $\alpha \in R$

a) $\frac{x^2 \operatorname{tg} x}{5\operatorname{sen}^3 x} \sim \frac{x^2 . x}{5x^3} = \frac{1}{5} \to \frac{1}{5}$

b) $\frac{x^4 - 1}{x^{10} - 1} \sim \frac{L(x^4)}{L(x^{10})} = \frac{4Lx}{10Lx} = \frac{2}{5} \to \frac{2}{5}$

c) $\frac{Lx}{x^3 - 1} \sim \frac{Lx}{L(x^3)} = \frac{Lx}{3Lx} = \frac{1}{3} \to \frac{1}{3}$

d) Si $\alpha \neq 0$: $\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \sim \frac{\alpha L(1+x)}{x} \sim \frac{\alpha x}{x} = \alpha \to \alpha$

Si $\alpha = 0$: $\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = 0 \to 0$

De modo que el límite es siempre α .

4) **Si u ~ v y su límite común no es 1, se tiene L|u|~ L|v|.**

En efecto:

$$\frac{L|u|}{L|v|} = \frac{L\left|\frac{u}{v}v\right|}{L|v|} = \frac{L\left(\left|\frac{u}{v}\right|.|v|\right)}{L|v|} = \frac{L\left|\frac{u}{v}\right| + L|v|}{L|v|} = \frac{L\left|\frac{u}{v}\right|}{L|v|} + 1 \to 1$$

ya que en la fracción del primer sumando el numerador tiende a 0 mientras que el denominador no tiende a 0 (v no tiende a 1)

Como aplicación importante, tendremos, para un polinomio de grado efectivo n::

$$L\left|a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_n\right| \sim L\left|a_0x^n\right| \quad \text{para } x\to+\infty \text{ o } x\to-\infty$$

Se deduce pues la **equivalencia del logaritmo del valor absoluto de un polinomio con el logaritmo del valor absoluto del término de mayor grado, para valores infinitos de la variable.**

5) **Si u ~ v y $\alpha\in R$, se tiene $u^\alpha \sim v^\alpha$.**

En efecto: $\dfrac{u^\alpha}{v^\alpha} = \left(\dfrac{u}{v}\right)^\alpha \to 1 \quad ya\ que\ \dfrac{u}{v} \to 1$

En particular, tomando $\alpha = \dfrac{1}{n}$, se tendrá: $\sqrt[n]{u} \sim \sqrt[n]{v}$.

6) **<u>IMPORTANTE</u> : Si u ~ v , no forzosamente u + w ~ v + w**

Por ejemplo, si $x\to 0$, tomando u = senx, v = x, w = 5x, tenemos obviamente

senx+5x ~ x+5x, ya que $\dfrac{\operatorname{sen} x + 5x}{x + 5x} = \dfrac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + 5}{1+5} \to 1$.

También senx + $5x^2$ ~ x + $5x^2$, ya que $\dfrac{\operatorname{sen} x + 5x^2}{x + 5x^2} = \dfrac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + 5x}{1+5x} \to 1$.

Pero si u = senx, v =x, w = -tgx, <u>no es cierto que senx-tgx ~ x-tgx</u> ; en efecto, usando los desarrollos en serie de Mac-Laurin de senx y tgx, tenemos:

$$\text{senx} - \text{tgx} \sim -\frac{x^3}{2} \qquad\qquad x - \text{tgx} \sim -\frac{x^3}{3}$$

lo cual muestra la <u>no</u> equivalencia de los primeros miembros, ya que:

$$\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x}{x - \operatorname{tg} x} \sim \frac{-\dfrac{x^3}{2}}{-\dfrac{x^3}{3}} \to \frac{3}{2} \neq 1$$

<u>CONCLUSIÓN</u> : Cuando se calcula el límite de una expresión, es lícito reemplazar una variable que figura en dicha expresión como factor o divisor (no se altera el límite buscado), pero <u>no siempre es lícito hacerlo cuando la variable figura como sumando</u> . Como recomendación general, <u>resulta conveniente no substituir un sumando por un equivalente</u> .

ORDEN DE INFINITÉSIMOS

Si u(x) y v(x) son dos infinitésimos para $x \to a$ y el cociente $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ tiene límite para $x \to a$, pueden producirse los siguientes casos:

1) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{u}{v} = 0$ Se dice que que u es un infinitésimo de **<u>mayor orden</u>** que v

2) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{u}{v} = \lambda$ finito y no nulo; se dice que u y v son de **<u>igual orden</u>**; en particular, si $\lambda = 1$, se dice que $u \sim v$

3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{u}{v} = \infty$ Se dice que u es de **<u>menor orden</u>** que v.

Además de definir orden comparativo, se puede definir el **<u>orden</u>** de un infinitésimo u(x) con $x \to a$ (finito) en la forma siguiente: escribimos la fórmula de Taylor entre **a** y **x** hasta el orden k+1 (suponemos u(x) continua y diferenciable infinitas veces); siendo **k** el orden de la primera derivada que no se anula en **a**
(o sea $u(a) = u'(a) = u''(a) = \ldots\ldots\ldots = u^{(k-1)}(a) = 0$ pero $u^{(k)}(a) \neq 0$); tendremos:

$$u(x) = \frac{u^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{u^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-a)^{(k+1)} \quad , \quad \text{donde } c \in (a,x)$$

Resulta que cuando $x \to a$, también $c \to a$ y entonces:

$$\frac{u(x)}{\dfrac{u^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k} = 1 + \frac{u^{(k+1)}(c)}{(k+1)u^{(k)}(a)}(x-a)$$

En esta expresión, para $x \to a$, observamos que : $u^{(k+1)}(c) \to u^{(k+1)}(a)$
$x - a \to 0$
las derivadas son finitas ya que u(x) es diferenciable infinitas veces

Entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{u(x)}{\dfrac{u^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k} = 1$ y por lo tanto:

$$\underline{u(x) \sim A\,(x-a)^k} \quad , \text{ siendo } \quad A = \frac{u^{(k)}(a)}{k!}$$

k se llama entonces **orden** del infinitésimo u(x) y $A(x-a)^k$ es su **parte principal**. Por ejemplo:

- Para $x\to 0$: $5\text{sen}x \sim 5x \Rightarrow 5\text{sen}x$ es un infinitésimo de 1er. orden
- Para $x\to 3$: $8\text{tg}^2(x-3) \sim 8(x-3)^2 \Rightarrow 8\text{tg}^2(x-3)$ es un infinitésimo de 2º orden
- Para $x\to 1$: $Lx \sim x-1 \Rightarrow Lx$ es un infinitésimo de 1er. orden
- Para $x\to 0$: $\text{sen}x - \text{tg}x \sim -\frac{1}{2}x^3 \Rightarrow \text{sen}x - \text{tg}x$ es un infinitésimo de 3er. orden

Propiedades : (fácilmente demostrables a partir de la definición de "orden")

1) Si u es un infinitésimo y k una constante $\neq 0$, la variable ku es un infinitésimo de igual orden que u.
2) La suma de infinitésimos de distinto orden es equivalente al de menor orden. Por ejemplo: para $x\to 0$, $5\text{sen}x + 8\text{tg}^2x \sim 5\text{sen}x$ pues senx es de 1er. orden y 8tg^2x de 2º orden.
3) La suma de varios infinitésimos de igual orden es un infinitésimo de igual orden que ellos o de orden superior. Por ejemplo: para $x \to O$,

senx	+	tgx	~	2x
(orden 1)		(orden 1)		(orden 1)
senx	+	3x	~	4x
(orden 1)		(orden 1)		(orden 1)
senx	+	(-x)	~	$-\frac{x^3}{6}$
(orden 1)		(orden 1)		(orden 3)

Observación : El infinitésimo (x-a) con $x\to a$ finito resulta ser el infinitésimo "base" para definir el orden del infinitésimo u(x). Cuando u(x) es un infinitésimo para $x \to +\infty$ o para $x \to -\infty$ (o sea que a no es finito), se puede tomar $\frac{1}{x}$

como infinitésimo base y hacer el cambio $\frac{1}{x} = y$ o $-\frac{1}{x} = y$,tendiendo pues a 0 la nueva variable independiente y . El estudio del orden del infinitésimo u(x) se hace sobre u($\frac{1}{y}$) o sobre u($-\frac{1}{y}$) con y→0, aplicándose los criterios anteriores.

ORDEN DE INFINITOS

Un **<u>infinito</u>** es una variable que tiende a +∞ o a -∞. Sean u(x) y v(x) dos infinitos para un cierto valor de x (finito o infinito). Si existe lím $\frac{u(x)}{v(x)}$, pueden suceder 3 casos:

1) lím $\frac{u(x)}{v(x)} = 0$ Se dice que u(x) es de **menor orden** que v(x)

2) lím $\frac{u(x)}{v(x)} = \lambda$ finito y $\neq 0$. Se dice que son de **igual orden**; en particular, si $\lambda = 1$, tenemos $u \sim v$

3) lím $\frac{u(x)}{v(x)} = \infty$ Se dice que u(x) es de **mayor orden** que v(x).

Para comparar infinitos, se emplean los siguientes infinitos fundamentales dependientes de la variable real x, los cuales están tipificados para x → +∞, aunque si x tuviera otro límite, se puede igualmente emplear los infinitos fundamentales, haciendo un cambio adecuado de la variable independiente (por ejemplo, si $x \to 0^+$, hacer $\frac{1}{x}$ = y → +∞; si x→ –∞ , hacer –x = y → +∞ ; si $x \to 5^+$, hacer $\frac{1}{x-5}$ = y → +∞). Los infinitos fundamentales son para x →+∞, ordenando sus órdenes fundamentales de infinitud en orden creciente:

$(\log_B x)^m$	x^p	a^x	x^{kx}
$B>1$	$p>0$	$a>1$	$k>0$
$m>0$			
Infinito	Infinito	Infinito	Infinito
“logarítmico”	**“potencial”**	**“exponencial”**	**“potencial-exponencial”**

Probaremos que esta enumeración está realizada en orden creciente :

I) a^x (con $a>1$) es de mayor orden que x^p (con $p>0$)

Sea $a = 1 + d$, con $d > 0$. Tomamos $n = E(x)$ (parte entera de x); podemos escribir:

$$a^x = (1+d)^x \geq (1+d)^n$$

En el desarrollo del binomio de Newton, las potencias de d van desde el exponente 0 hasta el exponente n; como $n \to +\infty$, lo tomamos suficientemente grande como para que aparezca el término en d^{p+1} ; entonces:

$$a^x > C^n_{p+1} d^{\,p+1} \quad = \frac{n(n-1)..........(n-p)}{(p+1)!} \sim \frac{n^{p+1}}{(p+1)!}$$

Resulta entonces, siendo $x < n+1$:

$$\frac{a^x}{x^p} > \frac{C^n_{p+1} d^{\,p+1}}{(n+1)^p} \sim \frac{n^{p+1}}{n^p (p+1)!} = \frac{n}{(p+1)!} \to +\infty$$

Se deduce lím $\dfrac{a^x}{x^p} = +\infty$ y por lo tanto a^x es de mayor orden que x^p .

II) x^p es de mayor orden que $(\log_B x)^m$

Ponemos $\log_B x = y \to +\infty$ $\qquad x = B^y \Rightarrow x^p = B^{py}$

Entonces $\dfrac{x^p}{(\log_B x)^m} = \dfrac{B^{py}}{y^m} = \dfrac{(B^p)^y}{y^m}$; pero el numerador es un infinito exponencial en y pues $B^p > 1$, mientrasque el denominador es un infinito potencial en y pues $m>0$. Por lo demostrado en (I), ese cociente tiende a $+\infty$.

III) x^{kx} (con $k>0$) es de mayor orden que a^x

Esto resulta obvio pues $\dfrac{x^{kx}}{a^x} = \left(\dfrac{x^k}{a}\right)^x \to +\infty$ ya que es de la forma $(+\infty)^{+\infty}$.

Se concluye entonces la buena ordenación de los infinitos enumerados.

Ejemplo de aplicación Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{L|x|}{e^{\frac{1}{x}}}$

Para $x\to 0^-$, tenemos una expresión de la forma $\dfrac{\infty}{0}$, de modo que $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{L|x|}{e^{\frac{1}{x}}} = +\infty$

Si en cambio $x\to 0^+$, la forma es $\dfrac{\infty}{\infty}$; hacemos $\dfrac{1}{x} = y \to +\infty$:

$$\frac{L|x|}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{Lx}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{L\frac{1}{y}}{e^{y}} = -\frac{Ly}{e^{y}} \to 0$$

, apoyándonos en los órdenes fundamentales de infinitud para $y\to+\infty$ (comparación entre un infinito logarítmico y un infinito exponencial)

Entonces $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{L|x|}{e^{\frac{1}{x}}} = 0$.

Infinito "factorial"

Si x es el natural n, con $n \to +\infty$, los infinitos fundamentales son:

$(\log_B n)^m$	n^p	a^n	n^{kn}
B>1, m>0	p>0	a>1	k>0

¿Dónde se ubica el infinito n!?

Para responder, usamos la fórmula de Stirling: $\lim \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1$,

o sea $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ (observar que resulta $\sqrt[n]{n!} \sim \dfrac{n}{e}$, como consecuencia de la propiedad $u \sim v \Rightarrow \sqrt[n]{u} \sim \sqrt[n]{v}$).

Vamos a demostrar la validez de la siguiente ordenación de los infinitos cuando n es natural, desdoblando el potencial-exponencial en dos casos según el valor de k:

$(\log_B n)^m$	n^p	a^n	n^{kn}	$n!$	n^{kn}
B>1 m>0	p>0	a>1	0<k<1		k≥1

En efecto:

1) <u>n! es de mayor orden que n^{kn}, con 0<k<1</u>

$$\frac{n!}{n^{kn}} \sim \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{n^{kn}} = \frac{n^{(1-k)n}}{e^n}\sqrt{2\pi n} \to +\infty \text{ , ya que } \frac{n^{(1-k)n}}{e^n} \to +\infty \quad \text{siendo } 1-k>0$$

$$\text{y } \sqrt{2\pi n} \to +\infty$$

2) <u>n! es de menor orden que n^{kn}, con k≥1</u>

$$\frac{n!}{n^{kn}} \sim \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{n^{kn}} = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{e^n}\frac{\sqrt{2\pi}}{n^{(k-1)n}} \to 0 \text{ , ya que } \frac{n^{\frac{1}{2}}}{e^n} \to 0$$

(comparación de infinitos) y $n^{(k-1)n}$ vale 1 si k=1 y tiende a $+\infty$ si k>1 .

<u>Propiedades</u> : (resultan obvias por las definiciones anteriores)

1) Si u es un infinito y k una constante ≠ 0, la variable ku es de igual orden de infinitud que u.
2) La suma de dos infinitos de distinto orden es un infinito equivalente al de mayor orden.

   Por ejemplo, para $x \to +\infty$, la suma de los dos infinitos $(x^4 + 7) - L(5x^2 - 6)$ es equivalente al primero $(x^4 + 7)$ pues es de mayor orden que el otro:

$$\frac{x^4+7}{-L(5x^2-6)} \sim \frac{x^4}{-L(5x^2)} = \frac{x^4}{-2Lx - L5} \sim -\frac{1}{2}\frac{x^4}{Lx} \to -\infty$$

   Hemos aplicado propiedades vistas en la pág. 4 y lo establecido para órdenes fundamentales de infinitud

3) La suma de dos infinitos de igual orden es un infinito de igual orden que ellos si éstos tienden ambos a +∞ o ambos a -∞ ; pero si tienden a infinitos de distinto signo, resulta una expresión indeterminada .

Ejemplos: a) Para x $\to -\infty$ $\underbrace{(x^3+7x^2-8)}_{\downarrow \atop -\infty} + \underbrace{(5x^3-6x+9)}_{\downarrow \atop -\infty} \to -\infty$

La suma es equivalente a $6x^3$, que es de igual orden que cualquiera de los sumandos.

b) Para x $\to -\infty$, la suma $\underbrace{(x^3+7x^2-8)}_{\downarrow \atop -\infty} + \underbrace{(-x^3-6x+9)}_{\downarrow \atop +\infty}$ resulta ser

$7x^2 - 6x + 1 \to +\infty$ y es un infinito de menor orden que cada uno de los sumandos.

c) Para x $\to -\infty$, la suma $\underbrace{(x^3+7x^2-8)}_{\downarrow \atop -\infty} + \underbrace{(-x^3-7x^2+10)}_{\downarrow \atop +\infty}$ resulta ser

2, cuyo límite es 2 (ni siquiera es un infinito)

Ejemplos de aplicación de los métodos desarrollados en las presentes notas

① **Calcular** $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3-7x^2+1} - \sqrt{x^2+8}\right)$

Se trata de una forma $+\infty - \infty$

Tenemos $\left(\sqrt[3]{x^3-7x^2+1} - \sqrt{x^2+8}\right) = \sqrt[6]{(x^3-7x^2+1)^2} - \sqrt[6]{(x^2+8)^3} =$

$$= \sqrt{x^2+8}\left(\sqrt[6]{\frac{(x^3-7x^2+1)^2}{(x^2+8)^3}} - 1\right) \sim x \text{ L } \sqrt[6]{\frac{(x^3-7x^2+1)^2}{(x^2+8)^3}} \text{ pues :}$$

$\sqrt{x^2+8} \sim x$ y la raíz sexta tiende a 1 ya que la expresión sub-radical es equivalente a $\dfrac{x^6}{x^6} = 1 \to 1$ (recordar la equivalencia fundamental ③ de la pág. 2). Continuamos con la última expresión, que es igual a:

$$\frac{x}{6} L \frac{(x^3-7x^2+1)^2}{(x^2+8)^3} \sim \frac{x}{6}\left[\frac{(x^3-7x^2+1)^2}{(x^2+8)^3}-1\right] \sim$$

$$\sim \frac{x}{6}\frac{x^6+49x^4+1-14x^5+2x^3-14x^2-x^6-24x^4-192x^2-532}{x^6} \sim$$

$$\sim \frac{x}{6} \quad \frac{-14x^5}{x^6} = -\frac{7}{3} \to -\frac{7}{3}$$

Observemos que la herramienta más eficaz del cálculo consiste en la eliminación de las expresiones irracionales.

② **Calcular lím** $\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+3x-4}$

x→1

Se trata de una forma $\dfrac{0}{0}$

$$\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+3x-4} = \frac{2\left(\sqrt{\dfrac{x+3}{4}}-1\right)}{x^2+3x-4} \sim$$

$$\frac{2L\sqrt{\dfrac{x+3}{4}}}{x^2+3x-4} = \frac{2\left(\dfrac{1}{2}L\dfrac{x+3}{4}\right)}{x^2+3x-4} = \frac{L\dfrac{x+3}{4}}{x^2+3x-4} = \frac{\dfrac{x+3}{4}-1}{x^2+3x-4} = \frac{x-1}{4(x-1)(x+4)} = \frac{1}{4(x+4)} \to \frac{}{2}$$

Observemos que en ambos pasos de equivalencia, empleamos, en ambos sentidos, la equivalencia $Lu \sim u-1$ para $u \to 1$.

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

<u>TÓPICO III</u> - <u>DERIVADAS Y DIFERENCIALES</u>

Noción de derivada

Sea $y = f(x)$ una función de variable real y x_o un punto de su dominio, siendo $y_o = f(x_o)$. Tomamos a partir de x_o un incremento Δx de la variable; el nuevo valor de la función será $f(x_o+\Delta x)$, sufriendo entonces $f(x)$ el incremento

$\Delta y = f(x_o+\Delta x) - f(x_o)$. Se llama cociente incremental en el punto x_o para ese Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

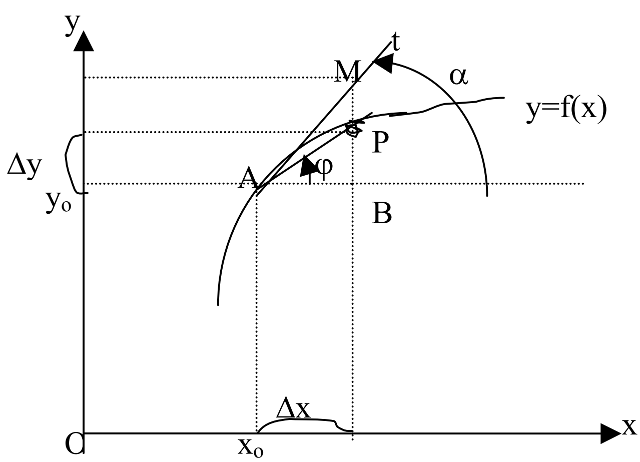
Si cuando $\Delta x \to 0$ este cociente tiene límite, la función se dice "derivable" en el punto x_o. En tal caso, dicho límite se llama "derivada" de f(x) en el punto x_o . Entonces escribimos, por definición:

$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Observemos que el límite puede ser $+\infty$ o $-\infty$, manteniéndose en este caso la noción de función "derivable". Gráficamente, la curva representativa de la función presenta un punto de inflexión "vertical". Pero en el caso en que los límites laterales (o sea para $\Delta x \to 0^+$ y $\Delta x \to 0^-$) son infinitos de distinto signo, el cociente incremental no tiene límite y la función no es derivable (punto de retroceso). Lo mismo ocurre cuando, aunque los límites laterales sean finitos, éstos sean distintos: la función no es derivable (punto anguloso).

Esta interpretación gráfica es una consecuencia de lo que veremos en el próximo párrafo.

Interpretación gráfica de la derivada



Hemos representado y = f(x) alrededor del punto x_o , donde el punto A es (x_o, $y_o = f(x_o)$) . Al tomar el incremento Δx de la variable, la función se incrementa en Δy, obteniéndose en el gráfico el punto M. La cuerda AM está inclinada un ángulo φ respecto a la dirección orientada del semi-eje Ox; φ está dado por:

$$\text{tg}\varphi = \frac{PM}{AM} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Cuando $\Delta x \to 0$, el punto M tiende al punto A y la cuerda AM tiende, por definición, a la tangente t a la curva en el punto A; entonces, para $\Delta x \to 0$:

$$\text{lím}\,\text{tg}\varphi = \text{lím}\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad ,$$

o sea:

$$\boxed{\text{tg}\alpha = f'(x_o)}$$

"**<u>La derivada de una función para el valor x_0 es la pendiente de la tangente a la curva representativa en el punto de abscisa x_o"</u>**, recordando que la pendiente de una recta es la tangente del ángulo orientado en sentido trigonométrico positivo con la dirección horizontal orientada según el semi-eje Ox.

Este resultado nos permite interpretar debidamente lo establecido en el párrafo anterior.

Cálculo de-- la derivada en algunos casos particulares

1) <u>$y = x^3$</u>

Consideramos esta función en el punto x_o. Formamos el cociente incremental obtenido al incrementar x_o en Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta x^2$$

Si hacemos $\Delta x \to 0$, obtenemos:

$$f'(x_o) = 3x_o^2$$

Para un punto genérico x, tenemos entonces: <u>$(x^3)' = 3x^2$</u>, obteniéndose así la llamada "función derivada".

2) <u>$y = \text{sen}x$</u>

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{sen}(x_0 + \Delta x) - \text{sen}\,x_0}{\Delta x} = \frac{\text{sen}\,x_0 \cos\Delta x + \cos x_0 \,\text{sen}\,\Delta x - \text{sen}\,x_0}{\Delta x}$$

$$= \cos x_0 \frac{\text{sen}\,\Delta x}{\Delta x} - \text{sen}\,x_0 \frac{(1 - \cos\Delta x)}{\Delta x}$$

Se sabe que para $\Delta x \to 0$: $\text{lím}\dfrac{\text{sen}\,\Delta x}{\Delta x} = 1$, $\text{lím}\dfrac{1 - \cos\Delta x}{\Delta x} = 0$ (ver “variables equivalentes”) , resultando entonces este límite:

$f'(x_o) = \cos x_o$ y en general: $\underline{(\mathrm{sen}x)' = \cos x}$

3) $\underline{y = e^x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x_0+\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \frac{e^{x_0}(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

Cuando $\Delta x \to 0$, la variable $e^{\Delta x} \to 1$ y entonces, recordando una equivalencia básica:

$$e^{\Delta x} - 1 \sim L(e^{\Delta x}) = \Delta x$$

Resulta pues:

$f'(x_o) = e^{x_0}$. En un punto genérico. $\underline{(e^x)' = e^x}$

4) $\underline{y = k}$ (k constante)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k - k}{\Delta x} = 0 \to 0$$

La derivada de una constante es la función 0. (Recordar además la interpretación gráfica de la derivada)

Estos ejemplos nos muestran que, mediante los métodos habituales de cálculo de límites, pueden hallarse las funciones derivadas de las distintas funciones usuales.

Sin embargo,, siendo las derivadas una herramienta de uso permanente en el estudio de las funciones, es conveniente memorizar el resultado para las derivadas de las funciones que usualmente aparecen en el Cálculo. Puede confeccionarse la siguiente tabla:

Función f(x)	Derivada f´(x)
k	0
x^{α} (α real)	$\alpha x^{\alpha-1}$
(en particular para $\alpha=1/2$) $\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
(en particular para $\alpha=-1$) $\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
e^x	e^x
Lx	$\frac{1}{x}$
senx	cosx
cosx	-senx
tgx	$1+\text{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

El lector podrá verificar fácilmente estos resultados mediante el límite del cociente incremental, como ya visto. En cursos más avanzados de Cálculo, se calculan también las derivadas de las funciones hiperbólicas y de las funciones trigonométricas inversas.

<u>Operaciones con funciones derivables (derivadas finitas)</u>

Siendo u(x), v(x), w(x) esas funciones derivables:

$(ku)' = ku'$ (k constante)

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

Dejamos al lector verificar la validez de estas operaciones.

Derivada de una función compuesta

En la práctica, las funciones que se presentan son una composición de las funciones básicas indicadas y es necesario establecer cómo se deriva una función "compuesta" (función de función).

Sea y = f(u), donde u = g(v), donde v = h(x) , funciones todas derivables. El esquema de dependencia es:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "h"] \arrow[rrr, bend right, "F"'] & v \arrow[r, "g"] & u \arrow[r, "f"] & y \end{tikzcd}$$

Tenemos y = f(g(h(x)) = F(x) : y depende de x (función compuesta) a través de las "funciones componentes" f, g, h. Hemos escrito una cadena de 3 funciones sólo par fijar ideas, siendo nuestro resultado válido para cualquier número de funciones componentes. Al efectuar un incremento Δx de la variable independiente x, v se incrementa en Δv, u se incrementa entonces en Δu, y se incrementa entonces en Δy. Podemos escribir:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta v}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Al hacer Δx → 0, todos los incrementos tienden a 0 (funciones supuestas derivables con derivada finita y por lo tanto continuas) y tomando límites, resulta:

$$\boxed{y'_x = y'_u \,.\, u'_v \,.\, v'_x}$$

Regla de la cadena

"La derivada respecto a x es el producto de las derivadas de las funciones componentes, cada una tomada respecto a su variable inmediata".

Ejemplos :

1) $y = \text{sen}^3(5x)$

Hacemos $y = u^3$, donde u = senv, donde v = 5x. Aplicando la regla de la cadena:

$$y' = 3u^2.\ \cos v.5 = 3\text{sen}^2(5x).\cos(5x).5$$

En la práctica, se procede directamente, sin nominar las variables intermedias.

2) $y = e^{3\cos(L^2 x)}$

Dejamos al lector aplicar la regla de la cadena, debiendo hallar:

$$y' = -6e^{3\cos(L\ x)}\ \text{sen}(L^2 x)\frac{Lx}{x}$$

3) y = L|x|

Consideramos y = Lu , donde u = |x| .

Sabemos que:

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x > 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$ (tomamos $x \neq 0$ para la existencia del logaritmo)

Entonces: $|x|' = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ -1 & si \quad x < 0 \end{cases}$ Usando la regla de la cadena:

$$L(|x|)' = \frac{1}{|x|}|x|' = \begin{cases} \frac{1}{x}1 = \frac{1}{x} & si \quad x > 0 \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x} & si \quad x < 0 \end{cases}$$ Resulta: $$\boxed{L(|x|)' = \frac{1}{x}}$$

<u>**Derivadas sucesivas**</u>

$(f'(x))' = f''(x)$ se llama "derivada segunda" de f(x); $f'''(x)$ es la derivada de $f''(x)$ o "derivada tercera" de f(x), y así sucesivamente. Estas derivadas juegan un rol muy importante en el estudio de las funciones, en particular en el desarrollo en serie de las funciones, que se estudiará en curso más avanzados.

Teoremas importantes sobre funciones derivables

1) <u>Teorema de Rolle</u> : Si f(x) es continua en [a,b], derivable en (a,b) y es f(a) = f(b), hay al menos un punto c interior al intervalo tal que $f'(c) = 0$

   La interpretación geométrica de este teorema establece que si la función toma valores iguales en los extremos del intervalo, hay al menos un punto interior en que la tangente a la curva representativa es horizontal

2) <u>Teorema de Lagrange</u> (o teorema del valor medio):
   Si f(x) es continua en [a,b] y derivable en (a,b), hay al menos un punto c interior del intervalo tal que $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$

   Observaciones: a) Escribiendo $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ y recordando la interpretación geométrica de la derivada, el teorema establece que hay al menos un punto interior del intervalo en que la tangente a la curva es paralela a la cuerda que une los dos puntos extremos de la curva en el intervalo.

   b) El teorema de Lagrange es una generalización del de Rolle: el de Rolle corresponde al caso en que la mencionada cuerda es horizontal.

   c) Escribiendo $f(b) = f(a) + (b-a)\, f'(c)$, se ve que el resultado del teorema es un caso particular de la fórmula de Taylor que se verá a continuación: es el caso en que el desarrollo de Taylor se detiene en la primera derivada.

3) <u>Fórmula de Taylor</u> : Si f(x) es continua en [a,b] y derivable n veces en (a,b) (con dervadas todas finitas), existe por lo menos un punto c interior del intervalo tal que:

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(c)$$

Observaciones: a) Se ve que esta fórmula es una generalización del resultado del teorema de Lagrange, el cual se puede considerar como una fórmula de Taylor con n=1.

b) Si tomamos a=0 y b=x, la fórmula toma una forma llamada **"fórmula de Mac-Laurin"** :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} x^n$$

Es esencial no emplear 0 en vez de c en la última derivada pues se estaría escribiendo que cualquier función es un polinomio, lo cual es claramente un absurdo. En el caso en que f(x) sea efectivamente un polinomio de grado n, su derivada enésima es una constante, de modo que sería indiferente el punto en el que se evalúa dicha derivada.

Las demostraciones de esos teoremas pueden consultarse en los textos clásicos de Análisis Matemático pero, independientemente de esas demostraciones, es indispensable que el estudiante de Ingeniería conozca los resultados de esos teoremas.

En particular, la fórmula de Mac-Laurin es fundamental para estudiar los desarrollos en serie de las funciones, que se emplean en cursos más avanzados de Análisis Matemático y se aplican en asignaturas técnicas de la carrera.

Funciones diferenciables

Sea la función f(x). A partir de un punto genérico x, damos a la variable independiente un incremento Δx, al que corresponde un incremento Δy de la función. Se trata de ver si se puede encontrr un número A fijo (independiente de Δx) de modo que Δy se pueda expresar por el producto $A\Delta x$ más el producto de un infinitésimo Δx por un infinitésimo:

$$\Delta y = A\Delta x + \varepsilon\Delta x \qquad \varepsilon \to 0 \text{ cuando } \Delta x \to 0$$

Si se puede encontrar el número A, se dice que la función es diferenciable.en el punto x. Tenemos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \varepsilon$$

Cuando $\Delta x \to 0$, $\varepsilon \to 0$ y por lo tanto $A + \varepsilon \to A$. Esto significa que el cociente incremental tiene límite y que por lo tanto la función es derivable en x. Podemos decir entonces que si una función es diferenciable en un punto, entonces tiene derivada finita A en ese punto.

Recíprocamente , si una función tiene derivada finita en un punto, entonces es diferenciable.

En efecto, sea A esa derivada finita: $A = f'(x) = \text{lím } \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando $\Delta x \to 0$, o sea:

$\text{lím}\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x} - A\right) = 0$, o sea que $\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x} - A\right)$ es un infinitésimo para $\Delta x \to 0$, de modo que: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} - A = \varepsilon$, lo cual expresa que la función es diferenciable.

Diferencial de una función :

Si una función f(x) es diferenciable:

$$\Delta y = A\Delta x + \varepsilon\Delta x \text{ ,}$$

la parte lineal $A\Delta x$ se llama "diferencial" de la función y se escribe dy.

Por ejemplo, si $A = f' = 2$ y $\Delta x = 3$, entonces $dy = 6$.

Interpretación geométrica :

Refiriéndonos a la figura realizada cuando planteamos la interpretación gráfica de la derivada en un punto, considerando x_o como un punto genérico x, podemos escribir que:

$\Delta y = BP$ $\quad dy = BM$ (pues BM es $f'(x)\Delta x$) $\quad \varepsilon\Delta x = MP$

Comprobamos que cuando se realiza el incremento Δx, debemos, desde el punto $x+\Delta x$, subir hasta la curva para hallar Δy pero subir hasta la tangente t para hallar dy..

Teorema : Toda función diferenciable en un punto es continua en ese punto.

En efecto, al ser $\Delta y = A\Delta x + \varepsilon\Delta x$, vemos que cuando $\Delta x \to 0$ resulta $\Delta y \to 0$; por lo tanto la función es continua..

Otra expresión de la diferencial :

Vimos que $dy = f'(x)\Delta x$. Si consideramos en particular la función $f(x) = x$, tendremos $dx = 1.\Delta x$, o sea $dx = \Delta x$. Decimos entonces que **para la variable independiente, es indiferente escribir Δx o dx.**

Resultará entonces que para una función f(x), con x independiente, la relación $dy = f'(x)\Delta x$ puede escribirse también $dy = f'(x)\,dx$, de donde resulta otra expresión para la derivada:

$$\boxed{f'(x) = \frac{dy}{dx}}$$

Diferenciales de operaciones : Se pueden establecer fórmulas análogas a las de las derivadas de operaciones. Por ejemplo, si tenemos un producto uv de funciones de la variable x, tenemos $d(uv) = (uv)'dx = (uv' + vu')dx = uv'dx + vu'dx$, resultando pues:

$$d(uv) = udv + vdu,$$

cuyo enunciado es smilar al de la derivada de un producto.

Diferenciales sucesivas

El Cálculo Diferencial establece expresiones similares para las diferenciales sucesivas de una función f(x), con x independiente. Por ejemplo, partiendo de:

$$dy = f'(x)dx,$$

tenemos dy como función de dos variables: x y dx. Mantenemos dx constante y consideramos dy como función de x; entonces:

$$(dy)' = (f'(x))'dx = f''(x)dx,$$

de donde $d(dy) = (f''(x)dx)dx = f''(x)\,dx^2$. Llamando $d(dy) = d^2y$ "diferencial segunda" de y, resulta $d^2y = f''(x)dx^2$ y, en general :

$$\boxed{d^ny = f^{(n)}(x)dx^n}$$

Observemos que dx^3, por ejemplo, es el cubo de dx, mientras que d^3y designa a la diferencial tercera de y.

Podemos además deducir una expresión diferencial para la derivada enésima de f(x):

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

Recalquemos que esta expresión es sólo válida cuando x es independiente . Si x depende de otra variable, la expresión de $d^n y$ es mucho más compleja y debe consultarse en textos especializados.

1.3- Algunas reflexiones sobre los exámenes

La preparación de las pruebas de evaluación y de los exámenes es una de las tareas más importantes del quehacer docente.
El objetivo de este párrafo es llamar la atención sobre determinados tópicos relacionados con los exámenes en general y comentar los temas siguientes: preparación del examen a proponer, desarrollo del examen escrito, exámenes orales, exámenes de múltiple opción.

SOBRE LA PREPARACIÓN DE LA PRUEBA ESCRITA A PROPONER

Es indispensable que los docentes asignen a esta tarea una importancia muy grande y no se limiten a improvisar una propuesta el día anterior al examen.

Es bien conocido, de acuerdo a nuestra experiencia como alumnos y como docentes, que los enunciados presentados en un gran número de propuestas adolecen de los siguientes defectos, como mínimo:

1- **Errores tipográficos ocurridos al pasar en limpio los enunciados.**
2- **Errores de sintaxis y errores gramaticales y de puntuación.**
3- **Errores de concepto en las preguntas formuladas, por ejemplo insuficiencia de datos en los problemas planteados.**
4- **Errores en la elección de los datos numéricos, que producen incompatibilidad en el problema propuesto o conducen a resultados absurdos.**
5- **Insuficiencias en la claridad de las preguntas.**

El punto 1 no tiene en general consecuencias graves pues los errores son rápidamente detectados en la primera lectura o son de corrección evidente. El punto 2 puede llegar a producir muchas preguntas durante la realización del examen, lo cual conspira contra el normal desarrollo del acto. Los puntos 3 y 4 tienen la terrible consecuencia que, al advertirse el error ante el desconcierto de los alumnos, el profesor deba anunciar que tal dato debe cambiarse por tal otro o que debe agregarse tal dato. Es fácil suponer el malestar y la pérdida de confianza que esa situación produce en los examinandos, así

como la pérdida de tiempo que ello acarrea ya que el alumno debe realizar violentas marchas atrás en su trabajo. El punto 5 obliga a efectuar aclaraciones complementarias sobre el alcance de las preguntas, hecho que también conspira contra el normal desarrollo del examen y contra el ambiente de silencio y tranquilidad que debe reinar durante el acto.
Es entonces indispensable que el docente que prepara el examen tenga la suficiente lucidez y experiencia como para prever las preguntas que pueden surgir durante el examen respecto al enunciado y agregar entonces en éste todas las notas complementarias que eviten la realización de esas preguntas. La hoja de enunciados debe ser completa en sí y tal que no aparezca ninguna ambigüedad y ninguna doble interpretación.

Al mismo tiempo, creo importante agregar las siguientes recomendaciones:

1- El docente debe, previamente al examen, proceder a resolver toda la prueba planteada, a fin de comprobar el tiempo que insume esa resolución y evitar así que los alumnos se enfrenten a insuficiencias en el tiempo previsto para sus respuestas y puedan trabajar sin la angustia que produce la necesidad de incómodos apresuramientos.
2- Debe indicarse en la hoja de enunciados el puntaje asignado a cada parte de la prueba, a fin de que el alumno conozca la importancia relativa que tiene cada parte en la evaluación y pueda entonces tener una idea clara sobre lo que se espera de él.

La preparación de los exámenes es por tales motivos una de las tareas más importantes del quehacer docente y no debe ser mirada como una obligación inevitable que no hay más remedio que cumplir, sino por el contrario como una de las tareas más enriquecedoras y en la cual el docente debe mostrar todas sus aptitudes. La prueba propuesta debe ser un ejemplo de claridad, precisión y adecuación al objetivo del curso y debe ocupar una buena parte de las horas de trabajo del docente. Creo que realizar adecuadamente esa tarea es una muestra de mínimo respeto hacia los alumnos y hacia esta Casa de Estudios. Si los profesores exigimos de los alumnos claridad en las explicaciones y rigor en los razonamientos, debemos dar el ejemplo mostrando esas virtudes en nuestro trabajo.

SOBRE EL DESARROLLO DEL ACTO DE EXAMEN ESCRITO

Muchos docentes confunden el acto del examen con una clase práctica. He conocido durante mi larga experiencia docente un enorme número de profesores que tienen la costumbre de acercarse a cada estudiante para comprobar “cómo le está yendo” y contestar las preguntas que el alumno se ve naturalmente tentado a formular al constatar la presencia del profesor a su lado.

Esta mala costumbre conspira contra la esencia misma del examen. La comprensión de los enunciados forma parte del examen y el alumno debe realizar la prueba en forma totalmente personal, sin dialogar con los profesores. A menudo esa mala costumbre por parte del docente proviene de cierto sentimiento de culpa y de falta de confianza en el documento propuesto a los examinandos, resultando que el docente trata de suplir esas carencias dialogando con los alumnos. En otros casos, se trata simplemente de una actitud demagógica o torpe por parte del docente, proveniente de una mala concepción del objetivo de los exámenes.

Considero que en un examen normal, donde la hoja de enunciados es correcta y clara, la presencia de los profesores es inútil; sólo se requiere un cuidante para impedir la comunicación entre los alumnos o la consulta de material bibliográfico en caso de que la prueba se realice a libro cerrado. La corrección debe hacerse <u>después</u> del examen y no <u>durante</u> el examen.

SOBRE LOS EXÁMENES ORALES

A lo largo de mi carrera docente, he tenido la oportunidad de integrar tribunales de examen tomando pruebas orales. En algunas ocasiones, he comprobado graves fallas en la forma de preguntar por parte de algunos docentes:

1- Diálogo excesivo, donde el profesor termina hablando mucho más que el alumno y donde finalmente no puede distinguirse si el que realmente contestó la pregunta es el alumno o el profesor. Algunos profesores hacen esto para lucirse pontificando frente a sus colegas, pero en otras ocasiones sólo se trata de torpeza.
2- Preguntas mal formuladas, donde la respuesta es obvia aunque no se conozca nada acerca acerca del tema. Un ejemplo, algo exagerado, con el fin de que se entienda lo que quiero significar (aunque exagerado, juro que yo estuve presente en ocasión de esta pregunta y de otras similares), en un examen de “Instalaciones Eléctricas”, el profesor pregunta: “en un caño de instalación eléctrica, ¿puede ponerse un número cualquiera de conductores o éste debe estar limitado por el diámetro del caño?” ¡!!!!

3- Cuando una pregunta se considera fundamental dentro de un determinado curso (o sea que no puede aprobarse la asignatura si no se conoce el tema) y el alumno no la contesta, el examen debe darse por finalizado y no decir a continuación: ”bueno, vamos a preguntar otra cosa”, porque si el alumno responde correctamente, no se sabrá qué hacer con el fallo y si se decide la reprobación (que parece inevitable), el alumno quedará con una sensación de injusticia ya que en toda la parte final de su examen contestó todo correctamente. Por ejemplo, en un examen de Geometría elemental donde se supone indispensable conocer el teorema de Pitágoras, se formula al alumno la pregunta: “Teorema de Pitágoras, enunciarlo y demostrarlo”; el alumno manifiesta no conocerlo. Luego se le dice: “bueno, otra cosa: triángulos semejantes”, luego “definir homotecia”, etc., etc.; si el alumno contesta siempre bien, el Tribunal tendrá serias dificultades para emitir su fallo: ¿puede ser aprobado el alumno desconociendo el teorema de Pitágoras? Más valía entonces dar por finalizado el examen luego de la primera pregunta. Para evitar esta situación enojosa por la brevedad del examen, es aconsejable no iniciar el examen con ese tipo de pregunta definitoria y dejarla para cuando el examen ya esté bastante avanzado.

SOBRE LOS EXÁMENES DE MÚLTIPLE OPCIÓN

Ésta es una modalidad muy práctica cuando el número de alumnos es muy elevado y además permite juzgar con total objetividad, evitando los jeroglíficos y galimatías que a menudo figuran en las hojas entregadas por los alumnos. En Matemáticas, por ejemplo, al pedirse por escrito la demostración de un teorema, en la gran mayoría de los casos lo que presentan los alumnos no son demostraciones sino sucesiones de palabras que aparecen en la verdadera demostración. Los tribunales a menudo optan por la posición indulgente ya que esa sucesión de palabras “se parece” a la demostración y entonces queda la sensación de que el alumno estudió mucho durante la preparación de su examen.

Los exámenes de múltiple opción evitan esos inconvenientes y permiten, si están bien concebidos, detectar si el estudiante aprendió a resolver problemas y si comprendió los conceptos más importantes del curso teórico.

La corrección resulta muy fácil y limpia y evita toda discusión posterior sobre la justicia del fallo. El propio alumno puede calificarse si se le dan a conocer las respuestas correctas. Pero siendo tan sencilla la corrección, la preparación de la prueba da mucho más trabajo que la preparación de una prueba clásica. Independientemente de las preguntas planteadas, existen aspectos formales que en general se aplican en todas partes del mundo:

1- Las respuestas posibles a cada pregunta son en general 5.
2- Una y sólo una de las respuestas propuestas debe ser correcta.
3- Una pregunta no contestada genera 0 punto, pero una respuesta incorrecta debe ser penalizada con puntos negativos (del orden de 40% del valor de la pregunta) para evitar así respuestas aleatorias que pudieran generar puntos positivos.
4- Las respuestas incorrectas no pueden idearse de cualquier manera: deben evitarse opciones obviamente descartables (por ejemplo si la respuesta requerida es un número positivo, sería muy torpe proponer las opciones incorrectas con números negativos). Además las opciones incorrectas deben en general ser originadas por errores de cálculo o de concepto que son frecuentemente realizados por los alumnos; no se trata de tender trampas a los alumnos pero sí de distinguir al estudiante que piensa y opera bien, sin caer en esos frecuentes errores.

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

1.4- <u>Sobre la introducción de los números complejos</u>

Cuando se introducen los complejos a alumnos que nunca los conocieron, he visto algunos textos (y también algunos cursos dictados por profesores) donde el número complejo se define como **a + bi ,** siendo a, b reales y **i** un "símbolo" para $\sqrt{-1}$. Esto a mi juicio tiene dos graves inconvenientes:

1) El alumno inteligente se siente un poco desconcertado ante esa definición pues el profesor, muy familiarizado con los números complejos, no advierte que el alumno recibe esa definición como si alguien le dijera: "llamamos **n** a un "símbolo" que representa a un número natural que sea par e impar al mismo tiempo"!!!!!!
2) Hay también un error formal en esa notación. Es bien sabido que cuando se trabaja con raíces cuadradas de reales positivos, la notación $\sqrt{9}$ está representando al número 3, a pesar de que 9 tiene dos raíces cuadradas. Está aceptado que cuando se escribe $\sqrt{9}$, o sea una raíz cuadrada no precedida de un signo, se está indicando la raíz positiva, o sea 3. Cuando se escribe $\sqrt{2}$, se quiere representar a la raíz cuadrada positiva de 2. Ésta es una convención universalmente aceptada.
   Pero cuando el número que se desea radicar no es un real positivo, esta convención es inoperante ya que el número imaginario obtenido no tiene "signo" y por lo tanto no se sabe de qué se está hablando. En particular, el número –1 tiene dos raíces cuadradas, **i** y **–i**; ¿quién es $\sqrt{-1}$, ¿el número **i** o el número **–i ? Lo único que puede afirmarse sin confusiones es que i^2 = -1 , sin pretender con esta igualdad estar definiendo al número i.**

Una introducción correcta de los complejos consiste en definirlos como (a,b) (pareja de reales), definir las operaciones y mostrar luego el isomorfismo de los complejos (a,0) con los reales a (coincidencia de los neutros de las operaciones básicas) y escribir (a,0) = a, mostrando así que los complejos son una ampliación de los reales y que las definiciones adoptadas para las operaciones respetan las leyes de Hankel (mantenimiento de las leyes formales y coincidencia con resultados conocidos cuando los complejos son reales). Usando luego la definición de producto se obtiene (0,1)x(0,1) = (-1,0) = -1. Definiendo (0,1) = i , resulta pues $i^2 = -1$, con gran regocijo de los alumnos!! Se evita así toda ambigüedad en la definición de **i** y además se muestra que (a,0) + (b,0).(0,1) = a + bi. También se obtiene (0,-1)x(0,-1) = -1. Dado que en el desarrollo de la teoría, el número (-a,-b) se define como "opuesto" del número α = (a,b), escribiéndolo como -α , resultará que (0,-1) es el opuesto de i y se podrá escribirlo como –i. También se demuestra en la teoría que existen 2 y sólo 2 raíces cuadradas de cualquier complejo no nulo, de modo que las únicas raíces cuadradas de -1 son i y –i.

Ésta es la forma rigurosa de introducir a los números complejos. Es verdad que los alumnos que se inician en el manejo de los números complejos se desconciertan ante la definición del producto (a,b)x(c,d) como (ac-bd, ad+bc), pero hay que explicarles que esa definición respeta las mencionadas leyes de Hankel (en particular de la segunda) y que ellos pueden verificar que el producto de dos reales a=(a,0) y b=(b,0) (después de haber explicado el mencionado isomorfismo) les sigue dando el resultado ab. Es el mismo desconcierto que sienten los alumnos de primaria cuando, al introducir las fracciones, la maestra les dice que $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$, por ejemplo que $\frac{5}{3}+\frac{7}{2}=\frac{10+21}{6}$.El alumno piensa: ¡cómo complica las cosas esta maestra! ¿Por qué no me deja escribir $\frac{5}{3}+\frac{7}{2}=\frac{5+7}{3+2}$, que es mucho más fácil? Hay que hacer ver al alumno que los enteros son racionales particulares y que , siendo $4=\frac{4}{1}$ y $9=\frac{9}{1}$, su definición "fácil" de suma le daría $4+9=\frac{4}{1}+\frac{9}{1}=\frac{4+9}{1+1}=\frac{13}{2}$, sabiendo el alumno que el resultado correcto es 13!!

Resulta siempre que al iniciarse en la Matemática, el alumno se encuentre con alguna situación desconcertante, muy difícil de evitar. Pero con una buena explicación, empleando argumentos convincentes y adaptados al nivel y edad del alumno, el maestro o profesor lo podrá ayudar a comprender la necesidad de esas definiciones “complicadas”. El desconcierto inicial conducirá al alumno hacia la madurez….

CAPÍTULO 2 – ALGUNAS NOTAS HISTÓRICAS

2.1 – Tres vidas exitosas

2.1.1 – GAUSS (1777-1855)

Arquímedes, Newton y Gauss pertenecen a un rango especial dentro de los grandes matemáticos. En particular, Carl Friedich GAUSS es llamado en la historia de los genios "el príncipe de los matemáticos", con toda justicia. De él dijo Leopold Kronecker en el siglo XIX: "Todas las matemáticas de nuestro siglo en lo que respecta a las ideas científicas originales están vinculadas a Gauss".

Se ha escrito en abundancia acerca de la biografía de Gauss y de su excepcional aporte a la Matemática. Es interesante destacar que Gauss no solamente fue un verdadero genio, sino que mostró una asombrosa precocidad (lo cual no se da forzosamente en la historia de los grandes creadores). Para ilustrar esa faceta de Gauss, nada mejor que contar una anécdota de su niñez

Ésta es la historia: a la edad de ocho años, Gauss ingresa a una escuela primaria que es un sórdido remanente de la Edad Media. Esa escuela estaba manejada por un tal Buttner, cuyo único procedimiento pedagógico hacia el centenar de niños a su cargo era el de aterrorizarlos estúpida y brutalmente. Fue en ese infierno que Gauss inició su aprendizaje escolar. A la edad de diez años, Gauss ingresa a la clase de aritmética manejada por Buttner. Éste se entretenía proponiendo a los niños problemas que requerían largas y engorrosas operaciones de cálculo , con resultados que Buttner podía hallar en pocos segundos aplicando sencillas fórmulas que los niños naturalmente desconocían.. Buttner ese día propuso el siguiente ejemplo: pedía a los niños que obtuvieran el resultado de la suma $1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + 100$, o sea la suma de los 100 primeros números enteros Según la costumbre de la escuela, el primer alumno que terminaba su tarea colocaba su pequeña pizarra sobre la mesa, el segundo colocaba la suya sobre la primera, y así sucesivamente. Apenas Buttner había terminado de exponer el problema, Gauss colocó su pizarra diciendo "ya está".Luego, durante una hora, Gauss permaneció sentado, con los brazos cruzados, mientras sus compañeros se entregaban a realizar sus operaciones de suma, todo bajo la mirada sarcástica de Buttner, quien imaginaba que el más joven de los alumnos de esa clase era simplemente otra cabecita vacía. ¡Cuál fue su estupefacción al ver que la pizarra de Gauss contenía el total exacto! Hacia el final de su vida, Gauss se regocijaba contando esa historia.

Sin duda, ese resultado es muy fácil de obtener cuando se conocen las progresiones aritméticas, pero nadie había mostrado a Gauss la sencilla estratagema necesaria para resolver rápidamente semejante problema (Gauss simplemente observó que dos términos equidistantes de los extremos producían siempre la misma suma) y debe reconocerse que para un niño de diez años, se trata de algo realmente extraordinario lo de hallarla él mismo instantáneamente. Ése era el inicio de la entrada de Gauss en la inmortalidad…

2.1.2 – SOPHIE GERMAIN (1776-1831)

Del punto de vista vocacional, esta ilustre matemática tuvo una adolescencia muy difícil para seguir su fuerte inclinación: sus padres le prohibieron los libros de Matemáticas por considerar que "eso no es para mujeres". Por tal motivo, Sophie debía extraer a escondidas libros de Matemáticas de la biblioteca de su padre, leyéndolos con pasión e inteligencia poco común. Al comprobar que esa tarea clandestina afectaba la salud de Sophie (leía casi en la obscuridad y bajo temperaturas gélidas), sus padres finalmente transaron y no se opusieron más a esa inclinación de su hija.
Sophie pudo así comenzar una tarea que fue el motivo de su vida. A los dieciocho años, quiso estudiar en l´"École Polytechnique" de París pero las mujeres no estaban autorizadas a ingresar en esa Escuela (!!!), que se creó para formar matemáticos e investigadores. Sophie siguió entonces estudiando en forma individual, con la necesidad de someter sus investigaciones ante matemáticos que las pudieran entender; para eso, Sophie usó un seudónimo masculino y logró así interesar a matemáticos ilustres como Lagrange y Gauss!!! Cuando éstos, después de algunos años, conocieron la verdad sobre Sophie, la aceptaron con interés y cordialidad.
Sophie Germain pudo así destacarse en el círculo privilegiado de los matemáticos de Europa (todos de sexo masculino). Cuando abandonó la Teoría de Números, Sophie se dedicó a la Física y produjo sus célebres trabajos sobre la teoría de superficies elásticas, considerados como geniales.
Sophie falleció a los 55 años pero Francia la ha considerado como una de sus mujeres más importantes como creadora científica. Para honrarla, se designó con su nombre una calle de París ("Rue Sophie-Germain"), una escuela ("École Sophie-Germain") en cuya entrada se encuentra erigida una estatua que la evoca y también la casa en que falleció (rue de Savoie) fue decretada monumento histórico.

2.1.3 – TERENCE TAO (nacido en 1975)

Ésta no es propiamente una nota "histórica" pues se trata de una historia actual
Terence Tao es un norteamericano de padres chinos y es un matemático con actualmente 33 años. Aquí algo sobre su vida:académica:
- A los 11 años, ya participaba de las Olimpíadas de Matemáticas.
- A los 13, ganó la Olimpíada norteamericana.
- A los 21, se doctoró en Matemáticas
- A los 23, ya era docente de una prestigiosa Universidad de California
- A los 31 (año 2006), **ganó la medalla FIELDS!!!**

El motivo de su premio fue la resolución de un importante problema que se encontraba "abierto" y que pasamos a describir. Señalamos algunos primos en orden creciente:

2,3 progresión aritmética de razón 1
3,5,7 salto 2
5, 11, 17, 23, 29 salto 6
7, 37, 67, 97, 127, 157 salto 30
7, 157, 307, 457, 607, 757 salto 150
....

Terence Tao demostró que existen cadenas de primos, a distancia cada vez más grande, así hasta el infinito. (**Pero cuidado, no es que existan cadenas de primos con razón arbirariamente dada).** También halló fórmulas para ciertas velocidades que permiten hallar esas cadenas con saltos cada vez más grandes!!!
CON ESA DEMOSTRACIÓN, TERENCE TAO GANÓ LA MEDALLA FIELDS!!!!!

2.2 – <u>Tres finales trágicos</u>

2.2.1- ARQUÍMEDES (287-212 AC)

El griego Arquímedes está considerado como el mayor espíritu de la antigüedad, a pesar de que en cierto modo es esencialmente moderno: es el único antiguo que razonaba habitualmente con la entera libertad que caracteriza hoy a los grandes matemáticos cuando manejan los conceptos más finos del Cálculo; pero éstos se benefician de los progresos peniblemente adquiridos a lo largo de 25 siglos, que les han afirmado sus herramientas.
La historia relata que Newton y Leibniz fueron los que inventaron el Cálculo Diferencial e Integral. Pero en realidad Arquímedes ya había descubierto métodos generales para calcular las áreas de figuras planas curvilíneas y los volúmenes de cuerpos limitados por superficies curvas, habiendo aplicado esos métodos a casos particulares como el círculo, la esfera, el segmento de parábola, los segmentos esféricos, las superficies engendradas por la revolución de rectángulos, triángulos, cónicas, etc.. Estableció un método para calcular π (razón entre la circunferencia y su diámetro). También incursionó en la Aritmética y en importantes problemas de Mecánica, creó la Hidrostática y la aplicó para hallar las posiciones de cuerpos flotantes, etc.. En cierto modo, anticipó la invención del Cálculo Infinitesimal en más de 2000 años antes que Newton y Leibniz. Él empleó esos recursos haciendo notar que sus seguidores les darían el rigor que era necesario para fundamentar sus métodos.

Arquímedes se enteró que su ciudad de Siracusa había sido tomada por los Romanos al advertir la sombra de un soldado romano sobre una figura que el matemático estaba trazando sobre el polvo del suelo. La Historia cuenta que el soldado habría caminado sobre los dibujos, provocando la cólera de Arquímedes: "¡no borre mis círculos1", habría gritado; otra versión cuenta que Arquímedes se negó a obedecer la orden del soldado de acompañarlo a entrevistar al jefe romano, habiendo manifestado que no podría hacerlo hasta no terminar con su problema. Cualquiera sea la versión verídica, el soldado, irritado, descargó su espada sobre el geómetra de 75 años. Así murió el gran Arquímedes, porque estaba absorto en la contemplación de una figura geométrica…

2.2.2 – GALOIS (1811-1832)

¡Las obras completas de Evaristo Galois constituyen su legado inmortal, a pesar de llenar sólo 60 páginas! Su vida muestra una persecución y una malvada incomprensión por parte de sus profesores, situación originada por ataques de rabia contra sus examinadores, provocando a menudo escándalos importantes. Cuando fue admitido en la Universidad, a los 19 años, el sentimiento de sus capacidades trascendentes se traducía por un fuerte desprecio hacia sus maestros, trabajando entonces en forma solitaria, de acuerdo a sus ideas: en ese año, produjo gran avance en la teoría de las ecuaciones algebraicas. Mantuvo grandes conflictos con sus contemporáneos, no sólo académicos sino también políticos. Fue encarcelado durante muchos meses pues se le consideraba como un radical peligroso.

A pesar de esa vida tan agitada y del apresuramiento al redactar sus manuscritos (en muchos de ellos, se puede leer: "¡no tengo tiempo, no tengo tiempo!"), las ideas de Galois produjeron importantísimos teoremas sobre la Teoría de Grupos. En un duelo originado por razones políticas, Galois fue alcanzado por la bala de su adversario, que lo dejó tumbado en el suelo y sin asistencia médica. Al ser trasladado a un hospital, falleció al alba del día siguiente al duelo, a la edad de 21 años.

A pesar de su corta vida, la obra de Galois inspiró a todos los algebristas del siglo XIX.

2.2.3 – GÖDEL (1906-1978)

La vida de Kurt Gödel no presenta la trágica muerte que describimos para los dos genios anteriores. Pero esta vida tiene características dramáticas derivadas de una verdadera paranoia que él sufrió durante toda su existencia.

Gödel nació en Austria, en el seno de una familia austríaca, pero vivió principalmente en Estados Unidos, donde se nacionalizó y ejerció su labor como profesor durante 36 años en la Universidad de Princeton. Sus trabajos más importantes marcaron en forma decisiva las investigaciones en Lógica Matemática: en particular, Gödel probó la imposibilidad de obtener una demostración de la consistencia de la Aritmética de Peano.

Pero a pesar de sus grandes hallazgos en Matemáticas, su vida mostró dramáticos síntomas de paranoia: se sabe que, siendo una persona muy religiosa, escribió una demostración de la existencia de Dios; en sus últimos años, llegó a cuestionar el valor y la importancia de su propio trabajo; tuvo siempre dificultades en aceptar algún encuentro casual; él afirmaba que alguien tenía la intención de envenenarlo,… La causa de su muerte, acaecida en 1978, permanece en el misterio…

2.3 - ¿Por qué no existe premio NOBEL en Matemáticas?

Alfredo Nobel (1833-1896) fue un químico sueco exitoso, habiendo logrado en 1866 obtener la dinamita a partir de la nitroglicerina. En su testamento, estableció 5 premios anuales en beneficio de los autores de obras literarias, científicas y filantrópicas que se destacaran especialmente, siendo éstas las 5 disciplinas correspondientes: Física, Química, Fisiología y Medicina, Paz, Literatura; en los años recientes, el gobierno sueco agregó el premio NOBEL para Ciencias Económicas, el cual es subsidiado por el gobierno y no por la fundación NOBEL.
Pero, ¿por qué Nobel manifestó explícitamente que deseaba que no hubiese un premio en Matemáticas? Hubieron al respecto varias especulaciones, siendo la más difundida la versión de que su esposa cometió adulterio al relacionarse con un matemático. Pero esa versión es falsa ya que se sabe que Nobel nunca se casó y que nunca mantuvo una relación estable de pareja. ¿Tuvo Nobel enemistad personal con algún matemático profesional? Lo cierto es que el misterio nunca fue aclarado…Por tal ausencia de premio NOBEL en Matemáticas, se crearon la medalla FIELDS y el premio ABEL, cada uno dotado con un millón de dólares para los descubridores.

2.4 – La infinitud de los números primos

Haremos una mención histórica acerca de este tema tan conocido. Existe un gran número de demostraciones para la infinitud de los primos, pero presentaremos solamente la conocida demostración de Euclides para señalar una propiedad relacionada con ella y la demostración de Euler, mucho menos difundida.

2.4.1- Demostración de Euclides

Esta prueba es muy conocida y muy simple y la recordamos a continuación.
Sean $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ………., p_n los n primeros números primos. Demostraremos que existe siempre un primo mayor que p_n , cualquiera sea n. Consideramos el número $N = p_1.p_2.p_3 \ldots\ldots.p_n + 1$. Para este número, existen 2 posibilidades:

1) N es primo. Ya que obviamente $N > p_n$, nuestra tesis quedaría probada.

2) N es compuesto y entonces admite un divisor primo p. Pero N no es divisible por ninguno de los primos p_i considerados ya que la división de N por cualquier p_i da como resto 1. Por lo tanto p es diferente de cualquier p_i y por lo tanto es mayor que p_n.

Se aprecia la simplicidad de la demostración y al mismo tiempo la belleza del razonamiento.

Esta demostración nos sugiere el siguiente **desafío**: ¿Alguna de las 2 posibilidades encaradas para N se cumple siempre exclusivamente o pueden suceder ambas? En otras palabras, ¿es N siempre primo, o es N siempre compuesto o es N a veces primo y a veces compuesto?
Hagamos algunas pruebas de los primeros números N.

$2 + 1 = 3$ primo
$2.3 + 1 = 7$ primo
$2.3.5 + 1 = 31$ primo
$2.3.5.7 + 1 = 211$ primo
$2.3.5.7.11 + 1 = 2311$ primo
…………………………………..

¿Será que todos los números N son primos? La respuesta es **NO.** El desafío consiste en hallar el primer ejemplo en que el número N resulta compuesto.
Curiosamente, el primer p_n para el cual N resulta compuesto aparece justamente en la prueba siguiente a las que realizamos, o sea cuando $p_n = 13$. En efecto:

$$2.3.5.7.11.13 + 1 = 30031$$

y 30031 es compuesto ya que $30031 = 59 \times 509$.
Aprovechamos la ocasión para comentar que los dos problemas siguientes están abiertos, o sea que hasta la fecha no han sido resueltos:

1) ¿Existen infinitos números N primos?
2) ¿Existen infinitos números N compuestos?

Por supuesto, si alguna de ambas respuestas fuera negativa, el otro problema quedaría resuelto con respuesta afirmativa, ya que la cantidad de números N es infinita.

2.4.2 – Demostración de Euler

Idea básica:

Sea p un primo cualquiera; obviamente $\frac{1}{p} < 1$. Si consideramos entonces la serie geométrica de razón 1/p y primer término 1, obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$$

Si q es otro número primo, tenemos análogamente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{q^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{q}}$$

Entonces, multiplicando miembro a miembro:

$$(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+...............)(1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+............) = \frac{1}{1-\frac{1}{p}}\ \frac{1}{1-\frac{1}{q}}\ ,$$

o sea:

$$1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{pq}+\frac{1}{q^2}+............... = \frac{1}{1-\frac{1}{p}}\frac{1}{1-\frac{1}{q}}$$

El primer miembro es la suma de los inversos de todos los números naturales de la forma $p^n q^m$ ($n \geq 0$, $m \geq 0$); cada uno de esos naturales está contado una sola vez porque se sabe que todo natural tiene una única expresión como producto de números primos.

Demostración de Euler :

La idea anterior es la base de la demostración de Euler.

Supongamos que p_1, p_2 , ..., p_r forman el total de los primos. Para cada i = 1,2,.....,r tendremos:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{p_i^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}$$

Multiplicando miembro a miembro estas r igualdades, obtenemos:

$$\prod_{i=1}^{r}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{p_i^n}\right) = \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}$$

Si en el primer miembro efectuamos todas las operaciones, obtenemos la suma de los inversos de **todos** los números naturales, como resulta del teorema fundamental que establece que cada número compuesto se escribe de manera única (a menos de permutaciones) como producto de factores primos. Pero es sabido que la serie armónica

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ es divergente, de modo que el primer miembro de nuestra última igualdad será infinito, mientras que el segundo miembro es finito. **ESTO ES ABSURDO.**

2.5 – Relación entre el número áureo y la sucesión de Fibonacci

El número "aúreo"

Es bien sabido que este número fue empleado por los artistas renacentistas (pintores, escultores, arquitectos), y en particular por Leonardo DA VINCI, para lograr proporciones "estéticas" en sus creaciones. Por tal motivo, lo llamaron "número áureo" o "razón de oro".

Dadas las magnitudes **a** y **b** (a>b), se dice que su razón $\frac{a}{b}$ es el número áureo cuando $\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$, o sea cuando **b** es media proporcional entre **a** y **a+b** ($b^2 = a(a+b)$). Si escribimos esta relación en la forma:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{a}{b} + 1}$$

y llamamos **A** al número áureo, tenemos:

$$A = \frac{1}{A+1} \quad ,$$

o sea que A es la solución positiva de la ecuación $A^2 + A - 1 = 0$, de lo cual se obtiene:

$$\boxed{A = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$$

Este número es por supuesto irracional y algébrico construible. Su representación decimal es A = 0,618033…….. Los artistas que lo usaban para aplicarlo en sus proporciones empleaban $A \approx 0{,}6$.

Relación de A con la sucesión de Fibonacci

La célebre sucesión de Fibonacci es:

1 1 2 3 5 8 13 …………………… ,

definida por la propiedad de que cada término, a partir del tercero, se obtiene sumando los dos anteriores. Resolviendo la ecuación en diferencias finitas $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, o sea $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$ (lineal homogénea de segundo orden). Se obtiene la expresión del término general:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] ,$$

para n = 1, 2, 3, …………

El cociente entre un término y el siguiente es $\frac{a_n}{a_{n+1}}$. Demostraremos que ese cociente tiende al número áureo cuando $n \to +\infty$, o sea que:

$$\boxed{\begin{array}{l} lím \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = A \\ n \to +\infty \end{array}}$$

<u>1ª demostración</u> : Empleando la expresión del término general

Tenemos :
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}$$

Tanto en el numerador como en el denominador, aparece la suma de un infinito y un infinitésimo cuando $n \to +\infty$, de modo que, de acuerdo a la técnica de cálculo de límites, tenemos, para $n \to +\infty$:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \sim \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^N}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{N+1}} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \rightarrow \frac{2}{1+\sqrt{5}}$$

Racionalizando el denominador:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad ,$$

o sea el número A.

<u>2ª demostración</u> : Aprovechando la ley de formación de la sucesión

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \Rightarrow \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

Si llamamos λ al límite buscado para $n\to+\infty$, o sea al límite del cociente entre un término y su siguiente, tendremos, igualando los límites de ambos miembros:
$1/\lambda = 1 + \lambda$, es decir $\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$, de lo cual resulta que λ es el número A.

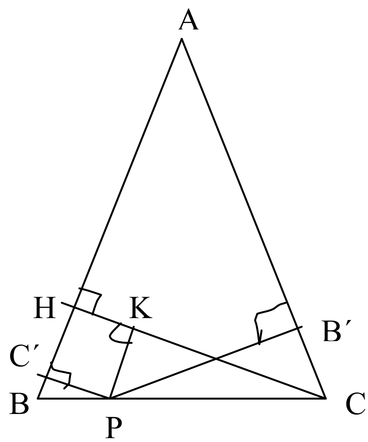
<u>CAPÍTULO 3</u> MÁS SOBRE “GÉOMÉTRIE MON AMOUR”

En este capítulo, expondremos algunas propiedades y problemas de Geometría plana racional, que ha sido mi pasión desde mis tempranos contactos con la Matemática. Algunos de los ejemplos que expongo se refieren a temas relativamente simples pero con soluciones no siempre triviales.
Se trata de temas poco difundidos e indicamos, para el lector aficionado a la Geometría, nuestras soluciones al respecto, pero no descartamos que el lector pueda hallar demostraciones más simples o más elegantes que las que proponemos.

3.1 – <u>El teorema de Viviani</u>

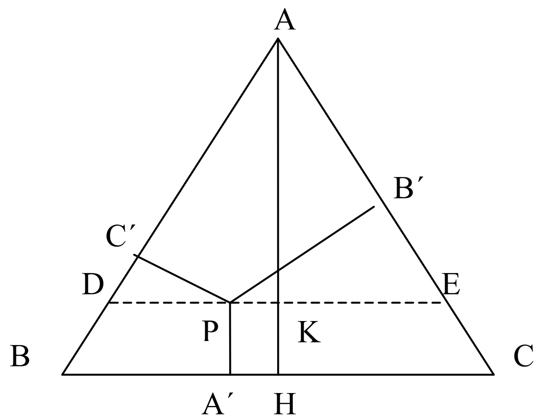
Nunca comprendí por qué este teorema ha sido motivo de gran difusión y de profusa literatura al respecto. Se trata de una propiedad muy simple del triángulo equilátero, aunque su enunciado es bien atractivo; la demostración de esa propiedad, como veremos, puede ser realizada por un estudiante sagaz del nivel de enseñanza secundaria.
El motivo de esa gran difusión puede estar en la situación siguiente. El famoso astrónomo del siglo XVII Galileo tenía como discípulos y ayudantes al geómetra Viviani y al célebre físico Torricelli, incluyendo ese grupo de científicos al famoso matemático Fermat. Éste desafió a Torricelli con un problema ligado al teorema de Viviani y que se refería a un punto notable de un triángulo cualquiera llamado “punto de Fermat”, que tiene la propiedad de que si se une ese punto con cables que pasan por los vértices donde se han colocado poleas y se dejan colgadas en esos cables tres masas iguales, el sistema permanece en equilibrio. En el párrafo 1.6 del capítuño 1 de nuestro anterior libro “Viajando por rincones matemáticos” (itinerario 1), expusimos un análisis que denominamos “generalización de un problema de Steiner” y que justamente enfoca el estudio de un punto que llamamos “centro de cargas” y que es una generalización del “punto de Fermat”. Lo que une a todo el grupo de científicos que mencionamos es que ellos fueron artífices de una “revolución industrial” en el siglo XVII y crearon muchas aplicaciones a la Física y a la Ingeniería.(fenómenos hidráulicos, máquina de vapor, principios de termodinámica, etc.). Quizás ése sea el hecho que motivó que el “teorema de Viviani” haya quedado en el folklore científico como un descubrimiento de gran importancia, a pesar de ser absolutamente elemental.
El teorema de Viviani establece lo siguiente:
“Dado un triángulo equilátero, la suma de las distancias a los lados del mismo de un punto cualquiera interior al triángulo es independiente de la posición del punto; esa suma de las tres distancias es igual a la altura del triángulo”.
Indicamos una demostración que a nuestro juicio es la más simple.

<u>Propiedad previa en un triángulo isósceles</u> :



Sea el triángulo isósceles ABC (AB=AC) y sea P un punto cualquiera del lado BC, con sus distancias PB´ y PC´ a AC y AB respectivamente. Sea CH la altura relativa al lado AB. Si trazamos la perpendicular a CH desde P, es obvio que los triángulos PCK y CPB´ son iguales (triángulos rectángulos de misma hipotenusa y $C\hat{P}K = P\hat{C}B''$ por la igualdad de los ángulos B y C del triángulo). Entonces PB´= CK $\Rightarrow$ PB´+ PC´ = CK + KH = CH. **La suma de las distancias PB´ y PC´ resulta pues igual a la altura del triángulo ABC relativa a uno de los lados iguales.**

<u>Consecuencia</u> : Teorema de Viviani



Si ABC es equilátero, al trazar por P la paralela DE a BC, el triángulo ADE es también equilátero (por lo tanto isósceles) y entonces, por la propiedad previa, PB´ +PC´ es igual a la altura de ese triángulo relativa al lado AD. Siendo iguales las tres alturas de un triángulo equilátero, tendremos PB´ + PC´ = AK $\Rightarrow$ PA´+ PB´+ PC´ = KH + AK = AH, con lo cual queda probado el teorema.

<u>Observación importante</u> : Generalización

Si el punto P se toma en el plano del triángulo equilátero pero exterior al mismo,, el teorema sigue valiendo con tal de tomar la distancia a un lado con un signo asociado: si el punto pertenece a un ángulo del triángulo, la distancia al lado opuesto a ese ángulo debe tomarse con signo – y las otras dos distancias con signo + ; si el punto pertenece al opuesto de un ángulo del triángulo (ángulo cuyos lados son las prolongaciones de dicho ángulo), tomar su distancia con signo + y las otras dos con signo - . Por ejemplo, si el triángulo es ABC y el punto exterior es P, llamando PA´, PB´, PC´ a las distancias de P a BC, CA, AB respectivamente y h a la altura del triángulo::

1) Si $P \in \hat{A}$, el teorema se escribe -PA´ +PB´ +PC´ = h

2) Si P∈ opuesto de $\hat{A}$ (ángulo cuyos lados son las prolongaciones de AB y AC), el teorema se escribe PA´ - PB¨ - PC´ = h .

El punto exterior P se encuentra siempre en una de esas dos posibilidades respecto a uno y sólo uno de los ángulos del triángulo.
Dejamos a cargo del lector la simple tarea de verificar la atribución de signos mencionada (basta trazar por P la paralela al lado opuesto del ángulo involucrado con el punto P).
Con esa convención de signos, el teorema de Viviani resulta válido para cualquier punto del plano.

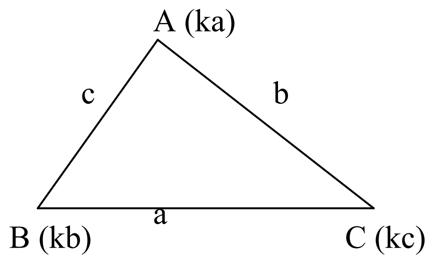
3.2 – <u>Centro de gravedad de un triángulo</u>

En los textos básicos de Física o de Geometría, se habla del "baricentro" o "centro de gravedad" de un triángulo y se menciona que ese punto se encuentra en la intersección de las tres medianas del triángulo.
Pero a esa referencia, deben agregarse algunas precisiones pues es necesario aclarar cómo se encuentra cargado el triángulo, o sea cómo están situadas las masas en el mismo, ya que, como veremos, la posición del centro de gravedad puede variar según esa situación.
Veamos algunos casos básicos:

<u>1er. caso</u> : El triángulo está sometido a 3 masas iguales situadas en los 3 vértices.
Es bien conocido, y muy fácil de demostrar, que el centro de gravedad se encuentra en el punto de intersección de las 3 medianas, lo cual explica que en Geometría ese punto se conozca como el "baricentro" del triángulo, denominándolo usualmente con la letra G.

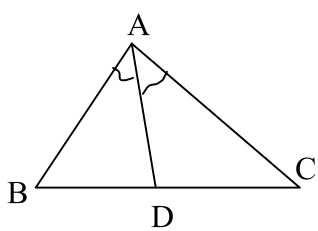
<u>2º caso</u> : El triángulo es una placa homogénea de espesor despreciable y la masa está distribuida en toda su área, con densidad uniforme (el triángulo está constituido por un único material).
También es muy conocido, y muy fácil de demostrar, que el centro de gravedad se encuentra ubicado también en el punto G mencionado en el 1er. caso, o sea en el corte de las 3 medianas.

<u>3er. caso</u> : El triángulo tiene masa solamente en sus 3 vértices, siendo esas masas proporcionales a los respectivos lados opuestos.



Los vértices son A,B,C, sus respectivos lados opuestos son a,b,c y las masas ka,kb,kc están indicadas entre paréntesis (k real positivo, de dimensión g/cm)

Para analizar este caso, recordamos una propiedad muy conocida del triángulo, llamada "**<u>teorema de la bisectriz</u>": en todo triángulo, una bisectriz cualquiera de un ángulo del mismo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los lados adyacentes del ángulo.**



AD bisectriz de $\hat{A}$

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

Para demostrar esta simple propiedad, basta trazar por C la paralela a AD hasta cortar la prolongación de BA en E y observar que el triángulo ACE es isoángulo y por lo tanto isósceles (AE = AC). Aplicando luego el teorema de Thales, se obtiene $\frac{DB}{DC} = \frac{BA}{AE} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$

Pasamos entonces a analizar nuestro problema del centro de gravedad. Componemos las masas kb y kc obteniendo un punto D_a de BC cargado con (kb + kc) y tal que (igualdad de momentos estáticos):

$$\overline{D_aB}.kb = \overline{D_aC}.kc \ ,$$

deduciéndose $\dfrac{D_aB}{D_aC} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{AB}{AC}$

Por el teorema de la bisectriz, se deduce que D_a coincide con D, pie de la bisectriz de $\hat{A}$, ya que existe un único punto que divide a un segmento según una razón dada. Luego debe componerse A(ka) con D(kb+kc) para obtener el centro de gravedad G. Por lo tanto G pertenece a AD, o sea a la bisectriz de $\hat{A}$. Análogamente, se deduce que G pertenece a las bisectrices de $\hat{B}$ y de $\hat{C}$ y por lo tanto:

G es el incentro del triángulo ABC

Se observa que este 3er. caso es una generalización del primero ya que cuando a = b = c las tres masas situadas en los vértices son iguales. Pero en tal caso el triángulo ABC es equilátero y entonces el incentro coincide con el corte de las tres medianas (las bisectrices son también medianas).

Otra demostración :

Es muy conocido, y de muy simple demostración, que el área S de un triángulo de lados a,b,c puede expresarse en las dos formas siguientes:

$$S = \frac{ah}{2} = pr \ ,$$

siendo h la altura relativa al lado a, p el semi-perímetro del triángulo y r el radio del círculo inscripto en el triángulo. Se desprende entonces que expresiones válidas para r son:

$$r = \frac{ah}{2p} = \frac{S}{p}$$

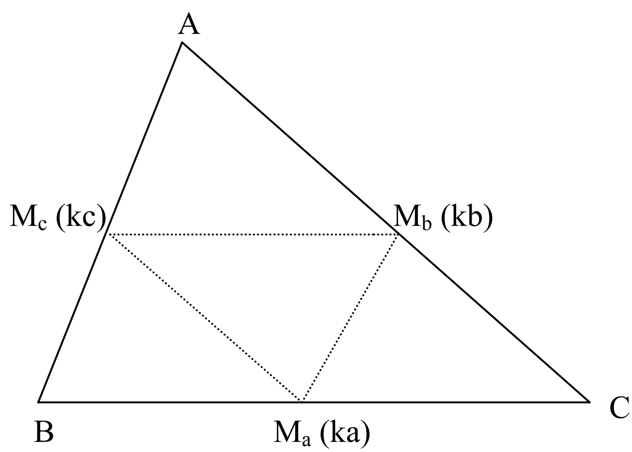
Pero el centro de gravedad G, cargado con (ka+kb+kc) tiene, respecto a la recta que contiene al lado a, el mismo momento estático que el conjunto de las tres cargas consideradas, siendo nulos esos momentos estáticos de las cargas kb y kc. Entonces, llamando d a la distancia de G al lado a, resulta.:

$$(ka+kb+kc)\ d = (ka)h \quad \Rightarrow \quad d = \frac{ah}{2p} \ ,$$

o sea, de acuerdo a lo escrito anteriormente : $d = \frac{S}{p}$.

Análogamente, la distancia de G al lado b y la distancia de G al lado c serán ambas S/p, o sea r. Por lo tanto: **el centro de gravedad del triángulo es en este caso el incentro del mismo.**

<u>4º caso</u> : El triángulo tiene masa solamente en su perímetro, con densidad lineal uniforme k.



El lado BC tiene su baricentro en su punto medio M_a,, con la masa ka. Análogamente, los otros dos lados tienen sus baricentros en sus puntos medios M_b y M_c , cargados respectivamente con kb y kc. Debemos pues hallar el baricentro de esos 3 puntos materiales M_a , M_b , M_c , que forman un triángulo de lados a/2, b/2, c/2 (segmentos formados con los puntos medios de los lados a, b, c del triángulo ABC) y que está cargado en sus vértices con las masas 2k(a/2), 2k(b/2) y 2k(c/2), proporcionales a los lados opuestos.. Estamos pues en las condiciones del 3er. caso y por lo tanto el baricentro buscado es el incentro del triángulo $M_aM_bM_c$. Nuestra conclusión es entonces la siguiente:

El baricentro de un triángulo T que se encuentra cargado (uniformemente) sólo en su perímetro es el incentro del triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados de T.

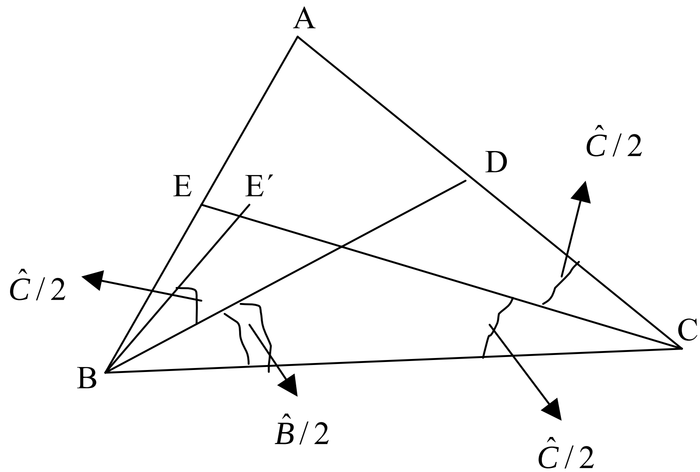
Observación : Cuando el triángulo es equilátero, los 4 casos analizados conducen todos al mismo baricentro, que es el centro del triángulo (para los tres primeros casos, las medianas coinciden con las bisectrices y para el cuarto caso, es inmediato verificar que el incentro del triángulo de los puntos medios es también el centro del triángulo).

3.3 – Acerca de un recíproco en el triángulo isósceles

Es bien sabido que si un triángulo ABC es isósceles (AB = AC), las alturas relativas a los lados AB y AC son iguales, también las medianas y también las bisectrices que inciden sobre AB y AC.
Los recíprocos de esas propiedades también son válidos. Es muy simple probar que si las dos alturas son iguales, el triángulo es isósceles y también lo es si las dos medianas son iguales. Pero no resulta tan trivial demostrar que si las bisectrices de los ángulos B y C son iguales, el triángulo debe ser isósceles (AB = AC)., como el lector se percatará si reflexiona al respecto unos minutos. En este párrafo, propondremos una demostración para ese recíproco.
Recordemos que para un triángulo, los conceptos de "isósceles" e "isoángulo" son sinónimos, o sea que AB =AC $\Leftrightarrow$ $\hat{B} = \hat{C}$.

Lema : Si un triángulo ABC tiene dos ángulos desiguales, por ejemplo $\hat{B} \neq \hat{C}$, las bisectrices de los ángulos B y C son desiguales.

Demostración : Para fijar ideas, supondremos por ejemplo que $\hat{B} > \hat{C}$ y demostraremos que las bisectrices cumplen BD < CE y por lo tanto BD $\neq$ CE.



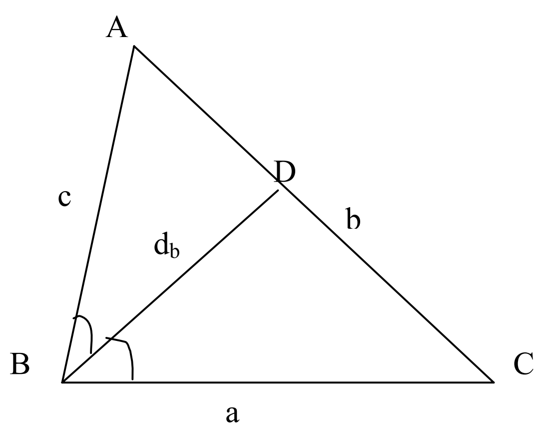
A partir de BD, tomamos el ángulo C/2 y cortamos con CE, obteniendo el punto E´. La recta BE´ será interior al ángulo DBE ya que teníamos C/2 < B/2 y entonces E´ será interior a CE.
El cuadrilátero BCDE´ será inscriptible ya que los puntos B y C ven al segmento DE´ bajo un mismo ángulo . Consideramos entonces la cicunferencia circunscripta a ese cuadrilátero. Podemos escribir: ángulo CBE´ > ángulo BCD (pues supusimos que el ángulo B es mayor que el ángulo C). Pero es sabido que en una misma cicunferencia a mayor ángulo inscripto corresponde mayor arco interceptado y por lo tanto:
arco CE´ > arco BD. Pero también, en una misma circunferencia, a mayor arco corresponde mayor cuerda; entonces entre las cuerdas se cumple: CE´ > BD . Como habíamos visto que CE > CE´ , resulta CE > BD y por lo tanto las dos bisectrices BD y CE resultan ser segmentos distintos, como lo queríamos demostrar.

<u>Consecuencia</u> : Se trata del contrarecíproco del lema, o sea que si las bisectrices BD y CE son iguales, el triángulo es isoángulo (o sea que los ángulos B y C son iguales).
En efecto, si los ángulos B y C fueran distintos, resultaría, aplicando el lema, que las dos bisectrices son desiguales, contradiciendo la hipótesis. Entonces el triángulo es isoángulo y por lo tanto isósceles. Queda probado el teorema principal que nos planteamos.

Otra solución

Para el lector que prefiere las soluciones algebraicas antes que sutiles razonamientos geométricos, proponemos aquí una solución basada en el cálculo de los segmentos de la figura.

Retomamos nuestro triángulo, en el cual hemos trazado la bisectriz BD del ángulo B y hemos llamado d_b a la longitud de esa bisectriz:



Aplicamos el teorema de la bisectriz:

$$\frac{AD}{DC}=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{AD}{AC}=\frac{c}{a+c} \Rightarrow AD=\frac{bc}{a+c}$$

Por el teorema del coseno en el triángulo ABD, tendremos entonces:

$$d_b^{\,2}=\frac{b^2c^2}{(a+c)^2}+c^2-2\frac{bc^2}{a+c}\cos\hat{A}$$

Pero aplicando el teorema del coseno en el triángulo ABC: $\cos\hat{A}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; nos queda entonces:

$$d_b^{\,2}=\frac{b^2c^2}{(a+c)^2}+c^2-2\frac{bc^2}{a+c}\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

Operando cuidadosamente, obtenemos la siguiente expresión para d_b^2 :

$$d_b^2 = ac\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{(a+c)^2}$$

Análogamente, permutando b y c:

$$d_c^2 = ab\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}$$

Imponemos $d_b = d_c$, quedándonos luego de simplificar por a(a+b+c):

$$c\frac{a+c-b}{(a+c)^2} = b\frac{a+b-c}{(a+b)^2}$$

Operando, ordenamos esta condición como polinomio en b:

$$cb^3 + (3ac+a^2)b^2 + (a^3-c^3-3ac^2)b - a^2c^2-a^3c = 0$$

Por la simetria de la condición respecto a b y c, esta ecuación debe admitir la solución b = c; bajando de grado con esta solución (esquema de Ruffini), nos queda la ecuación:

$$cb^2 + (3ac+a^2+c^2)b + (a^3+a^2c) = 0 \ ,$$

que obviamente no tiene otra solución real positiva.
Sólo es posible entonces b = c $\Rightarrow$ **El triángulo es isósceles** , como queríamos demostrar.

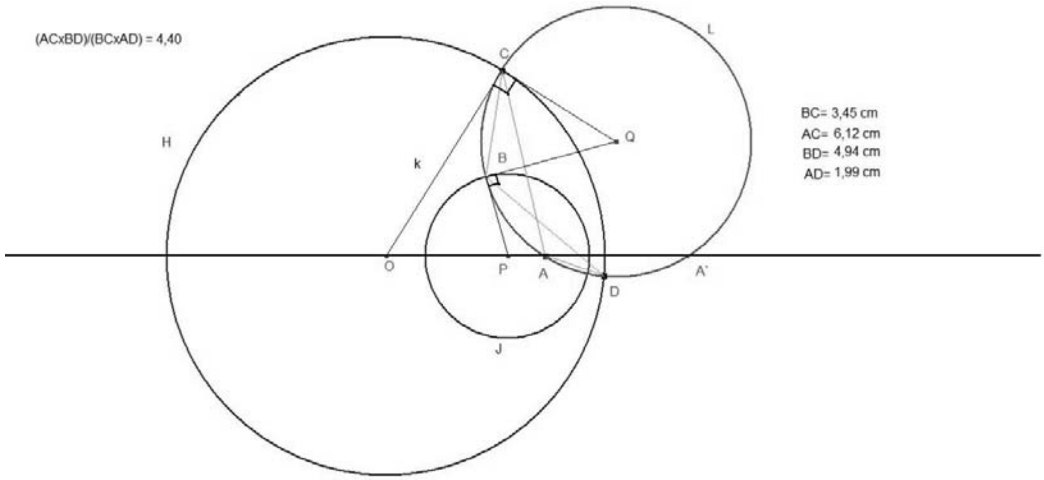
3.4 – Un problema de conservación de la razón doble

En el año 2006, a raíz de un artículo publicado en un semanario de Montevideo, tuve conocimiento de un libro escrito por un docente uruguayo, el profesor Bernardo CAMOU, donde en forma muy amena él nos cuenta todas sus peripecias para lograr obtener en Francia un título de Maestría en Didáctica (conocido como D.E.A en Francia) y toda su lucha contra la burocracia internacional para finalmente ser admitido en la Universidad Joseph Fourier de Grenoble y culminar sus estudios. Me interesó obtener su libro, que él tituló "Diario de un Profesor de Matemática", y que leí con mucho interés y que contiene, además de su aventura para lograr la admisión, interesantes ejemplos de didáctica y de pedagogía y de sus contactos con personalidades francesas como Jean-Marie Laborde y su esposa Colette, creadores del conocido software de geometría "CABRI GÉOMÉTRIE". Al descubrir su interesante exposición y su evidente vocación en la enseñanza y la investigación de problemas geométricos, no pude dejar de enviarle

un mensaje de felicitación por el trabajo realizado. Bernardo me respondió muy gentilmente y allí iniciamos un intercambio de mensajes acerca de nuestros intereses comunes. En particular, él me planteó un problema acerca de circunferencias ortogonales y de su necesidad de demostrar que una cierta razón doble que aparece en ese problema se mantenía constante cuando se variaba la figura; me explicó que ese problema estaba relacionado con un tema geométrico que él estaba estudiando y que esa demostración le permitiría continuar con más tranquilidad los estudios que estaba realizando. También me contó que había consultado a varios especialistas al respecto pero que ellos no pudieron ayudarlo o no tuvieron interés en estudiar el problema. Cuando tuve conocimiento del problema, comprendí que su resolución no era trivial y, a partir de allí continuamos con Bernardo una gran cantidad de intercambios y de sugerencias para seguir buscando. Al cabo de un mes, yo me sentí muy desanimado y estuve casi tentado a abandonar la búsqueda cuando, gracias a nuestro común esfuerzo, logramos encontrar la solución. Para celebrarlo, decidimos naturalmente encontrarnos y conocernos personalmente… Quizás él sí me conocía por haber asistido a alguna de mis clases en la Facultad de Ingeniería y por haber leído alguna de mis modestas publicaciones…
Expongo a continuación el mencionado problema por considerarlo un ejemplo interesante de geometría plana:

UN PROBLEMA DE RAZÓN DOBLE

Bernardo CAMOU
Isi HAIM



Planteo del problema :

Explicamos la figura según los pasos de su construcción:

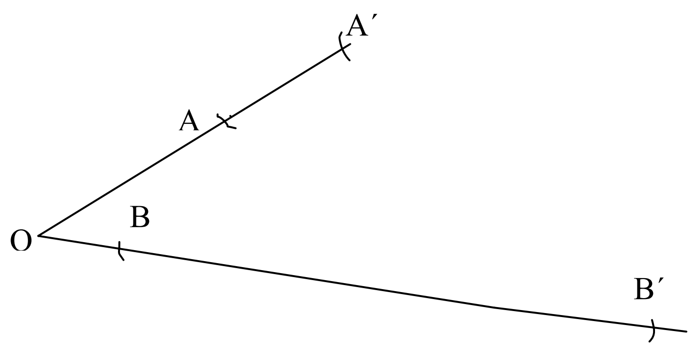
1) Sobre la recta (r), que es la horizontal de la figura, tomamos un punto O y trazamos la circunferencia (H) de cento O y radio k
2) Sobre (r), elegimos un punto A interior a (H) y ubicamos su inverso A´ en la inversión positiva de centro O y potencia k^2, que llamamos $I(O,k^2)$. Tenemos pues $\overline{OA}.\overline{OA'} = k^2$ (el inverso A´ será exterior a (H))
3) Elegimos otro punto P sobre la recta (r) entre O y A y construimos la media proporcional k´ entre PA y PA´ , de modo que $k'^2 = \overline{PA}.\overline{PA'}$ y A´ será también inverso de A en la inversión positiva $I(P,k'^2)$.
4) Trazamos la circunferencia (J) de centro P y radio k´
5) Sobre la mediatriz (m) de AA´ , elegimos un punto Q variable y trazamos la circunferencia (L) de centro Q y radio QA.
6) (L) corta a (H) en C y D y corta a (J) en B (hay otro corte en E, no designado en la figura). Por ser (L) variable, los puntos B, C, D también serán variables.

Problema a resolver : Demostrar que al variar Q, o sea al variar (L), la razón doble (ABCD) permanece constante. **En forma más explícita:** si tomamos otra circunferencia (L_1) cambiando el centro a Q_1, con $Q_1 \in (m)$, obtenemos otros puntos de corte A, B_1, C_1, D_1 (el corte A de (L) con (r) permanece fijo ya que tomamos para (L_1) el radio Q_1A, como ya explicado). Queremos probar que $(AB_1C_1\,D_1) = (ABCD)$, o sea que se obtiene la misma razón doble al variar (L).

DEMOSTRACIÓN

A) Lema

A1) En una inversión (O, p^2), tomemos 2 puntos Ay B y sus imágenes A´ y B´ :



Tenemos $\overline{OA}.\overline{OA'} = \overline{OB}.\overline{OB.'} = p^2$. Si llamamos OA = a, OB= b , es fácil ver que $A'B' = \dfrac{p^2}{ab} AB$.

En efecto, los triángulos OB´A´ y OAB son semejantes ya que el ángulo en O es común y $\dfrac{OA'}{OB} = \dfrac{OB'}{OA}$. La razón de semejanza es $\dfrac{OA'}{OB} = \dfrac{p^2/a}{b} = \dfrac{p^2}{ab}$.

Entonces $\dfrac{B'A'}{AB} = \dfrac{p^2}{ab} \Rightarrow \underline{A'B' = \dfrac{p^2}{ab} AB}$

A2) Deducimos entonces una propiedad básica de la inversión: **si A´, B´, C´, D´ son las imágenes de los puntos A,B,C,D , se cumple**

(A´B´C´D´) = (ABCD),

o sea que la razón doble (ABCD) es conservada en las imágenes.

En efecto, aplicamos A1, agregando la notación OC = c, OD = d:

$$(A'B'C'D') = \frac{A'C'.B'D'}{B'C'.A'D'} = \frac{\frac{p^2}{ac}AC.\frac{p^2}{bd}BD}{\frac{p^2}{bc}BC.\frac{p^2}{ad}AD} = \frac{AC.BD}{BC.AD} = (ABCD)$$

B) <u>Aplicación a nuestro problema</u>

Si demostramos que existe una inversión que transforma los puntos A,B,C,D en A,B_1,C_1,D_1 , quedará probada la tesis que propusimos.
Para eso, suponemos trazada en nuestra figura la circunferencia (L_1) que define a los homólogos A,B_1,C_1,D_1;demostraremos que existe una inversión que produce la transformación mencionada.
Descomponemos nuestra demostración en los pasos siguientes:

<u>Paso B1</u> :
Tomamos un punto cualquiera X sobre (m) y trazamos la circunferencia (N) de centro X y radio XA. (N) corta a (H) en T_1. La potencia de O respecto a esa circunferencia (N) es:

$$\mathcal{P}^{O}_{(N)} = \overline{OA}.\overline{OA'} = k^2 = \overline{OT_1}^2$$

Entonces OT_1 resulta tangente a (N) y por lo tanto $XT_1 \perp OT_1$. Se deduce que también XT_1 es tangente a (H): las dos circunferencias (N) y (H) son ortogonales.

Además, resulta: $\mathcal{P}^{X}_{(H)} = \overline{XT_1}^2 = \overline{XA}^2$

Análogamente: $\mathcal{P}^{X}_{(J)} = \overline{XA}^2$

<u>Conclusión</u> : **Todo punto X ∈ (m) es equipotente respecto a (H) y (J) (el valor común de ambas potencias es $\overline{XA}^2$). Además la circunferencia de centro X y radio XA es ortogonal a (H) y a (J).**

<u>Paso B2</u> :

Volviendo a nuestra figura del planteo (pág.1), consideramos otra circunferencia (L_1), que definirá a los puntos B_1 , C_1 , D_1 , homólogos de B,C,D.
Cortamos BB_1 con (m), obteniendo el punto Z. Puesto que $Z \in$ (m), tendremos, de acuerdo al paso B1 :

$$\overline{ZB}.\overline{ZB_1} = \mathcal{P}^{Z}_{(J)} = \overline{ZA}^2$$

La inversión (Z, $\overline{ZA}^2$) produce entonces las siguientes transformaciones:

$A \to A$
$A' \to A'$ (pues $ZA' = ZA$)
$B \to B_1$

Paso B3 :

Consideremos ahora la circunferencia (L) y su inversa en la inversión (Z, $\overline{ZA}^2$). Puesto que $Z \notin$ (L) , la inversa de (L) será una circunferencia, que contendrá a las imágenes de A,A´,B, o sea A,A´,B_1. Dado que 3 puntos determinan una única circunferencia, la imagen será (L_1), que contiene a esas 3 imágenes. Concluimos que **la imagen de (L) en la inversión (Z, , $\overline{ZA}^2$) es (L_1)**

Paso B4 :
Realizamos las mismas consideraciones que en los pasos B2 y B3, cortando CC_1 con (m) y obteniendo Z' . Concluimos que la imagen de (L) en la inversión ($Z', \overline{Z'A}^2$) es (L_1). Las dos inversiones obtenidas (la de centro Z y la de centro Z´) son positivas, ya que los puntos y sus imágenes están en el semi-plano izquierdo de (m) y por lo tanto no están separados por Z y tampoco por Z´. Pero es sabido que dadas dos circunferencias secantes (en este caso (L) y (L_1)), ellas admiten ser correspondientes en una única inversión positiva, con centro en el centro de homotecia directa entre ambas circunferencias.. Se concluye que **Z = Z´.**

Paso B5 :
Análogamente, DD_1 corta a (m) en Z´´ , del cual se prueba en la misma forma que Z´´ = Z. Entonces D_1 es la imagen de D en la inversión $(Z, \overline{ZA}^2)$

C) Resumiendo

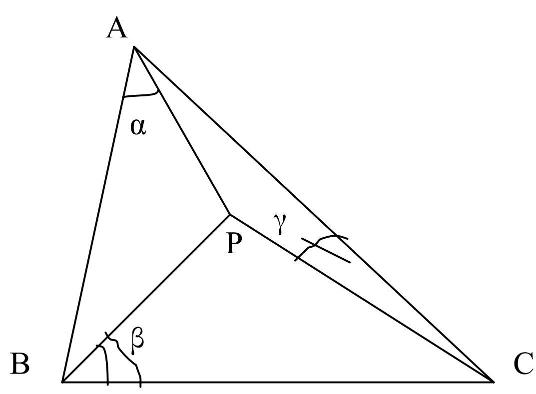
La inversión $(Z,\overline{ZA}^2)$ produce las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A \\ B &\rightarrow B_1 \\ C &\rightarrow C_1 \\ D &\rightarrow D_1 \end{aligned}$$

Entonces, de acuerdo al lema : **$(AB_1C_1D_1) = (ABCD)$** **L.Q.Q.D.**

Observación final :
Si en vez del punto D = (L) ∩ (H) hubiéramos tomado el punto E = (L) ∩ (J), resultaría en la misma forma $(AB_1C_1E_1) = (ABCE)$, o sea que también se conserva la razón doble.

3.5 – Una notable propiedad angular en todo triángulo



En un triángulo ABC cualquiera, se toma un punto P cualquiera interior al triángulo, formando los ángulos de la figura α, β y γ. Demostraremos que por lo menos uno de esos tres ángulos es ≤ 30º.

Demostración previa :
Para probar la propiedad enunciada, emplearemos la llamada “desigualdad de WEITZENBÖCH, que establece que en todo triángulo, de lados a, b, c y área S, se cumple siempre:

$$\boxed{4S\sqrt{3} \;\leq\; a^2 + b^2 + c^2}$$

Para demostrar esta desigualdad, puede emplearse la fórmula de Herón que da el área del triángulo en función de los lados:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, donde p = $\dfrac{a+b+c}{2}$, o sea el semi-perímetro del triángulo. Se deduce de esa fórmula:

$$16\,S^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \qquad (1)$$

Por la desigualdad triangular, todos los factores son positivos. Tomamos los tres últimos factores y les aplicamos la conocida desigualdad $m_g \leq m_a$ entre la media geométrica y la media aritmética de tres números positivos:

$$\sqrt[3]{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \leq \frac{a+b+c}{3} \Rightarrow (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \leq \frac{(a+b+c)^3}{27}$$

Se deduce de (1):

$$16S^2 \leq \frac{(a+b+c)^4}{27} = \frac{\left[(a+b+c)^2\right]^2}{27} \qquad (2)$$

Tomamos las ternas (a,b,c) y (1,1,1) y les aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

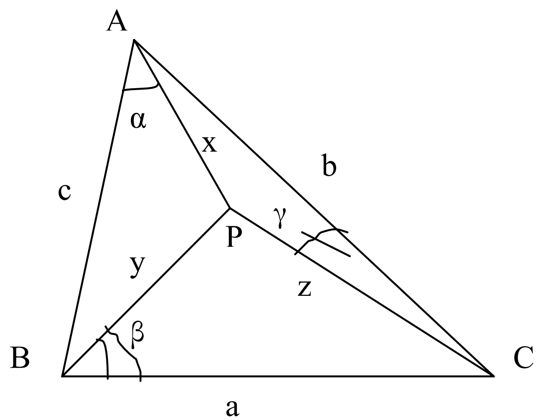
$$(a.1 + b.1 + c.1)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) = 3\,(a^2 + b^2 + c^2)$$

Entonces, en (2):

$$16S^2 \leq \frac{9(a^2+b^2+c^2)^2}{27} \Rightarrow 4S \leq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{3\sqrt{3}} \Rightarrow 4S\sqrt{3} \leq a^2+b^2+c^2$$

siendo esta última desigualdad la que queríamos demostrar.. Observemos que cuando el triángulo es equilátero (a=b=c), todas las desigualdades que escribimos se transforman en igualdades, quedando $4S\sqrt{3} = 3a^2$, lo cual es directamente verificable ya que en tal caso el área es $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

<u>Volvemos al problema propuesto</u> :
En nuestra figura, hemos llamado PA = x, PB = y , PC = z a las distancias de P a los vértices del triángulo, siendo a, b, c los lados del mismo:



Razonaremos por el absurdo. Supongamos que α, β, γ son los tres mayores que 30º; ninguno de ellos puede ser ≥ 150º pues resultaría α+β+γ > 150 + 30 +30 =210º, lo cual es obviamente falso. Nuestra suposición es entonces:

$$30º < \alpha < 150º \qquad 30º < \beta < 150º \qquad 30º < \gamma < 150º$$

y por lo tanto $\operatorname{sen}\alpha > ½$, $\operatorname{sen}\beta > ½$. $\operatorname{sen}\gamma > ½$. Pero tenemos, evaluando las áreas de los tres triángulos que integran el área S del ABC:

$$S = \frac{1}{2} cx sen\alpha + \frac{1}{2} ay sen\beta + \frac{1}{2} bz sen\gamma ,$$

de donde 2S = cx senα + ay senβ + bz senγ > $\dfrac{cx + ay + bz}{2}$

y entonces. <u>4S > ay + bz + cx</u> (I)

Por otra parte, aplicando el teorema del coseno en cada uno de los tres triángulos:

$$x^2 = z^2 + b^2 - 2bz\cos\gamma$$
$$y^2 = x^2 + c^2 - 2cx\cos\alpha$$
$$z^2 = y^2 + a^2 - 2ay\cos\beta$$

Sumando miembro a miembro:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2(ay\cos\beta + bz\cos\gamma + cx\cos\alpha)$$
$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 = 2(ay\cos\beta + bz\cos\gamma + cx\cos\alpha)$$

Pero al estar α, β, γ comprendidos en el intervalo (30º,150º), sus cosenos son todos menores que $\frac{\sqrt{3}}{2}$; entonces:

$$a^2 + b^2 + c^2 < \sqrt{3}(ay + bz + cx)$$

Aplicando ahora la desigualdad de WEITZENBÖCH, obtenemos:

$$4S < ay + bz + cx \ ,$$

lo cual contradice el resultado (I) . Llegamos a un absurdo y queda entonces probada la propiedad planteada.

3.6 – <u>Fórmula de Euler en el triángulo</u>

Expondremos esta notable fórmula mediante la cual se relacionan, en un triángulo cualquiera, el circuncentro O, el incentro I, el circunradio R y el inradio r. La fórmula establece que:

$$\boxed{d_{IO}^2 = R(R - 2r)}$$

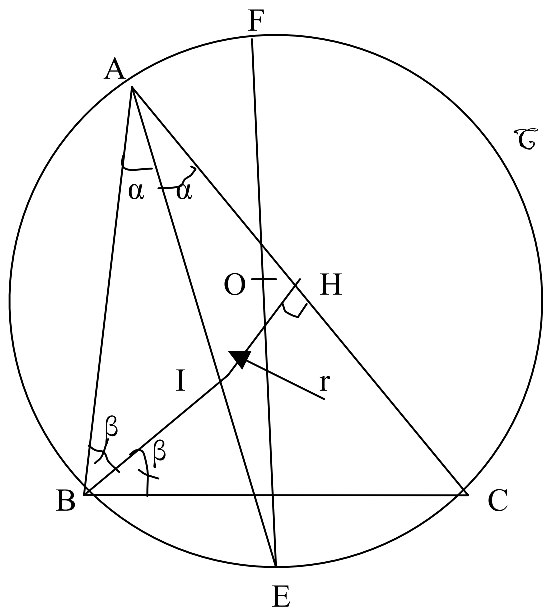
donde d_{IO} es la distancia entre el incentro I y el circuncentro O.
Su demostración resulta muy simple si se recuerda que la potencia de un punto P respecto a una circunferencia $\mathcal{C}$ es, cuando P es interior a la circunferencia:
$\mathcal{P}_P^{(\mathcal{C})} = R^2 - d^2$,
siendo R el radio de $\mathcal{C}$ y d la distancia de P al centro O de $\mathcal{C}$.
Volviendo a la fórmula de Euler, ya que I es interior a la circunferencia $\mathcal{C}$ circunscripta al triángulo, su potencia respecto a $\mathcal{C}$ será:

$$\mathcal{P}_I^{(\mathcal{C})} = R^2 - d_{IO}^{\ 2}$$

Demostrar la fórmula de Euler resulta entonces equivalente a demostrar que:

$$\underline{\mathcal{P}_I^{(\mathcal{C})} = 2Rr}$$

Consideremos entonces la circunferencia $\mathcal{C}$ circunscripta al triángulo ABC, de radio R:



La bisectriz del ángulo A pasa por el punto medio E del arco BC (ángulos inscriptos iguales en una circunferencia subtienden arcos iguales en esa circunferencia). La bisectriz del ángulo B corta a AE en I, que es entonces el incentro del triángulo. Desde I trazamos la perpendicular IH a AC, siendo entonces IH = r el inradio del triángulo. Si unimos E con el centro O del círculo, la recta EO corta a $\mathcal{C}$ en F. Siendo EF un diámetro, resulta que:

El triángulo BEF es rectángulo en B y $B\hat{F}E = B\hat{A}E = \alpha$ (1)

Observemos también que $E\hat{B}C = E\hat{A}C = \alpha$ (los dos ángulos subtienden el mismo arco EC), de modo que $E\hat{B}I = \alpha + \beta$. Por otra parte, $B\hat{I}E$ es un ángulo externo del triángulo BIA, de modo que $B\hat{I}E = \alpha + \beta$. El triángulo EBI resulta pues isoángulo y por lo tanto isósceles $\Rightarrow$ IE = BE.

Aprovechando esta observación, evaluamos la potencia de I respecto a $\mathcal{C}$:

$$\mathscr{P}_I^{(\mathscr{C})} = \overline{IA}.\overline{IE} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{P}_I^{(\mathscr{C})} = \overline{IA}.\overline{BE}$$

Pero IA = $\dfrac{r}{sen\alpha}$, BE = EF senα (recordar (1)) = 2R senα . Entonces:

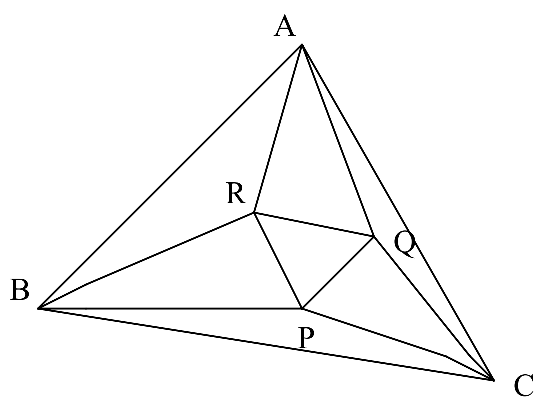
$$\mathscr{P}_I^{(\mathscr{C})} = \frac{r}{sen\alpha} 2R\ sen\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \mathscr{P}_I^{(\mathscr{C})} = 2Rr \quad ,$$

con lo cual queda probada la fórmula de Euler.

3.7 – <u>Teorema de Morley</u>

Este teorema establece una propiedad muy curiosa sobre las trisectrices de los ángulos de un truángulo, que fue hallada por Morley en el año 1899. El enunciado es el siguiente: **"Los tres puntos de intersección de las trisectrices adyacentes de los ángulos de cualquier triángulo forman un triángulo equilátero"** .

Seamos más explícitos mediante una figura:



Dado el triángulo ABC cualquiera, trazamos las trisectrices de los tres ángulos del mismo y tomamos el punto de corte P de las trisectrices adyacentes al lado BC; análogamente definimos las otras intersecciones Q y R. El teorema afirma que el triángulo PQR resulta siempre equilátero.

Presentaremos una demostración basada en una muy ingeniosa idea sugerida por M.T. NARANIENGAR alrededor del año 1910. Descomponemos nuestra demostración en 3 pasos para facilitar su argumentación:

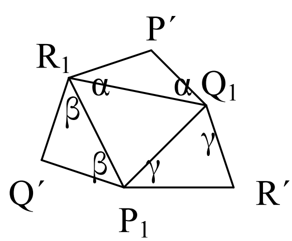
Paso 1.
A partir de nuestro triángulo ABC, calculamos los siguientes ángulos:

$$\begin{cases} \alpha = 60^{\circ} - \frac{1}{3}\hat{A} \\ \beta = 60^{\circ} - \frac{1}{3}\hat{B} \\ \gamma = 60^{\circ} - \frac{1}{3}\hat{C} \end{cases}$$

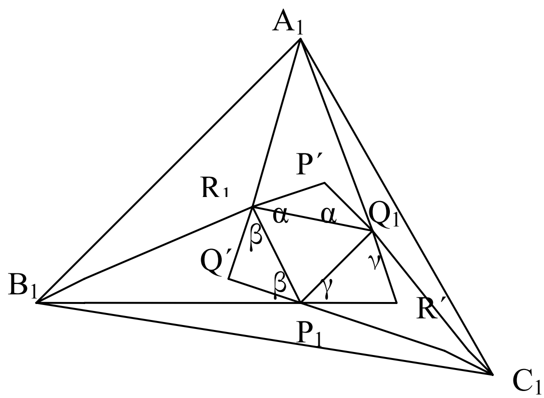
Observemos que , siendo $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^{\circ}$, resulta $\alpha + \beta + \gamma = 120^{\circ}$.

Además resulta :
$$\begin{cases} \hat{A} = 180^{\circ} - 3\alpha \\ \hat{B} = 180^{\circ} - 3\beta \\ \hat{C} = 180^{\circ} - 3\gamma \end{cases}$$

Paso 2 :
Partimos de un triángulo equilátero P_1 Q_1 R_1 de lado cualquiera y construimos, exteriormente a él y sobre sus lados como bases, tres triángulos isósceles de ángulos de base α, β, γ, obteniendo en los vértices los puntos P´,Q´,R´, de acuerdo a esta figura:



Prolongamos los lados de esos triángulos isósceles y llamamos A_1 , B_1 , C_1 a los cortes obtenidos en la forma indicada en esta figura:



<u>Paso 3</u> :
Vamos a demostrar que la figura obtenida es semejante a la figura de nuestro problema. Resultará entonces que el triángulo P_1 Q_1 R_1 es semejante al PQR y por lo tanto **quedará probado que el triángulo PQR es equilátero.**
Para demostrar esa semejanza, procederemos en dos sub-pasos:

Paso 3.1) Las rectas que salen de A_1 , B_1 , C_1 son las trisectrices de los ángulos A_1 , B_1 y C_1 .
Paso 3.2) El triángulo A_1 B_1 C_1 es semejante al ABC de nuestro teorema, para lo cual verificaremos que $\hat{A}_1 = \hat{A}$ $\quad \hat{B}_1 = \hat{B}$ $\quad \hat{C}_1 = \hat{C}$

Paso 3.1) Antes de proceder a este paso, recordaremos que en todo triángulo ABC el incentro del mismo ve al lado BC bajo el ángulo $90º + \dfrac{\hat{A}}{2}$, lo cual es muy simple de verificar. Nos referiremos luego a esta propiedad como ($\mathscr{P}$).
Comenzaremos por probar en nuestra figura que R_1 es el incentro del triángulo $R´A_1B_1$. En efecto, R_1 $R´$, mediatriz de P_1 Q_1 , es también bisectriz de $\hat{R}'$, de modo que R_1 está sobre esa bisectriz; pero además R_1 ve a A_1B_1 bajo el ángulo $\alpha+\beta+60º = 180º - \gamma$. Pero por otra parte, aplicando la propiedad ($\mathscr{P}$), sabemos que el incentro ve a A_1B_1 bajo el ángulo $90º + \dfrac{\hat{R}'}{2} = 180º - \gamma$

puesto que $\hat{R}'$ = 180º - 2α . Entonces R_1 es efectivamente el incentro del triángulo $R'A_1B_1$.
Se deduce entonces que A_1R_1 es bisectriz del ángulo B_1A_1R'.
Análogamente, A_1Q_1 es bisectriz del ángulo C_1A_1Q' .
Entonces las dos rectas que salen de A_1 son las trisectrices del ángulo A_1.
En la misma forma, llegamos a la conclusión de que las dos rectas que salen de B_1 son las trisectrices y también las que salen de C_1 son trisectrices.

Paso 3.2) Consideremos el triángulo $A_1R_1Q_1$. Los ángulos en su base R_1Q_1 son fácilmente calculables mediante sus suplementarios: en A_1 , tenemos el ángulo 180º- (60º + β) = 120º - β ; en Q_1 , tenemos análogamente 120º-γ .
Entonces , $R_1\hat{A}_1Q_1$ = 180º - (120º-β) – (120º-γ) = 60º - α .
Pero este ángulo es 1/3 del total del ángulo A_1 ; entonces $\hat{A}_1$ = 180º - 3α.
recordando el paso 1, resulta: $\hat{A}_1 = \hat{A}$. En la misma forma, obtenemos $\hat{B}_1 = \hat{B}$ y $\hat{C}_1 = \hat{C}$.
Esto completa nuestra demostración.

CAPÍTULO 4 - APLICACIÓN DEL CÁLCULO FINITO AL CÁLCULO DE SUMATORIAS

El objetivo de este capítulo es el de presentar la herramienta "Cálculo Finito" para calcular sumatorias en forma a menudo más simple y más práctica que el empleo de los métodos clásicos, cómo se verá. En esta oportunidad, quiero especialmente agradecer al profesor Ing. Álvaro FERNÁNDEZ, catedrático adjunto de Matemáticas en la Facultad de Ingeniería de ORT, por haberme informado acerca de la existencia de esa herramienta, que yo desconocía, y por haberme dado acceso a sus excelentes notas relativas al tema. La redacción de este capítulo se debe en gran parte a esas notas.
El Cálculo Finito nos acerca a un método muy fecundo para la evaluación de sumatorias finitas y presenta una interesante y asombrosa similitud con el cálculo de sumatorias de infinitos infinitésimos que aparece en el Cálculo Infinitesimal a través de la conocida fórmula de Barrow.

El objetivo inicial de estas notas es el de aplicar el "Cálculo Finito" al cálculo de la suma de las n primeras potencias k-ésimas de los naturales, o sea calcular $\sum_{x=1}^{n} x^k$, con k natural ≥ 1. Para apreciar el interés del método, recordaremos inicialmente el conocido procedimiento que emplea herramientas clásicas y luego expondremos el uso del Cálculo Finito.

<u>Primer método</u> : Empleando el cálculo clásico

Se comienza por determinar un polinomio P_k (x), de grado k+1, tal que::

$$P_k(x+1) - P_k(x) \equiv x^k$$

Los coeficientes de P_k (x) se obtienen igualando los coeficientes de los términos de igual grado en ambos miembros. Se escriben entonces (k+1) ecuaciones lineales con (k+1) incógnitas, quedando indeterminado solamente el término independiente del polinomio, como es obvio.

Determinado ese P_k (x) (a menos de su término independiente) , le damos a la variable x los valores 1, 2, ……., n :

$$1^k = P_k(2) - P_k(1)$$
$$2^k = P_k(3) - P_k(2)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$n^k = P_k(n+1) - P_k(n)$$

Sumando miembro a miembro, obtenemos la suma buscada:

$$\boxed{S_{nk} = P_k\,(n+1) - P_k\,(1)}$$

<u>Ejemplo</u> : Vamos a hallar S_{n2} , o sea $\sum_{x=1}^{n} x^2$.

Comenzamos por determinar el polinomio $P_2\,(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tal que:

$$P_2\,(x+1) - P_2\,(x) \equiv x^2,$$

o sea:

$$a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d - ax^3 - bx^2 - cx - d \equiv x^2$$

Desarrollando e igualando coeficientes, obtenemos $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$, quedando d indeterminado, como ya señalamos. Resulta pues:

$$P_2\,(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + d$$

Evaluando $P_2\,(n+1)$ y $P_2\,(1)$, obtenemos $S_{n2} = P_2\,(n+1) - P_2\,(1)$; operando, resulta: $S_{n2} = \frac{1}{6}\,n(2n^3 + 3n^2 + n)$, o sea:

$$\boxed{\sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

<u>Segundo método</u> : Empleando el Cálculo Finito

Comenzaremos estableciendo algunas notaciones y propiedades del Cálculo Finito.
Para todo real x, se define como **"<u>caída de x de orden k</u>"** (k entero ≥ 1), con la notación $x^{\underline{k}}$, al siguiente producto de k factores enteros:

$$x^{\underline{k}} = x(x-1)(x-2)\ldots\ldots\ldots(x-k+1)$$

Con esta definición, resulta inmediato verificar que $x^{\underline{k}} = \begin{cases} 0 & si\ \ x < k \\ \dfrac{x!}{(x-k)!} & si\ \ x \geq k \end{cases}$.

También son de verificación inmediata las siguientes propiedades:

1) $x^{\underline{1}} = x$
2) $x^{\underline{k}} = x.(x-1)^{\underline{k-1}}$ (con k>1)

3) $x^{\underline{k}} = x^{\underline{k-1}}\,(x-k+1)$ (con k>1)

4) $k^{\underline{k}} = k!$ (k natural)

5) $x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{n}}(x-n)^{\underline{m}}$ (x real, m, n enteros ≥ 0, m ≥ n)

Para expresar $x^{\underline{k}}$ mediante potencias habituales de x, observamos que el polinomio de grado k que lo define tiene las raíces 0, 1, 2, ……., k-1 , de modo que por las conocidas relaciones entre los coeficientes y raíces de un polinomio:

$$x^{\underline{k}} = x^k - S_1\,x^{k-1} + S_2\,x^{k-2} - \ldots\ldots\ldots + (-1)^{k-1}\,S_{k-1}\,x\ ,$$

siendo S_1 la suma de las raíces (obviamente $S_1 = \dfrac{k(k-1)}{2}$), S_2 la suma de todos los productos binarios de las raíces, ……, S_{k-1} la suma de todos los productos (k-1)arios de las raíces (obviamente $S_{k-1} = 1.2\ldots\ldots(k-1) = (k-1)!$). Así, por ejemplo:

$$x^{\underline{2}} = x(x-1) = x^2 - x$$
$$x^{\underline{3}} = x(x-1)(x-2) = x^3 - S_1\,x^2 + S_2\,x = x^3 - 3x^2 + 2x$$
$$x^{\underline{4}} = x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - S_1\,x^3 + S_2\,x^2 - S_3\,x = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$

Sumatoria de caídas de orden k :

Para aplicar estas nociones a nuestro problema, demostraremos la siguiente fórmula:

$$\boxed{\sum_{x=0}^{n} x^{\underline{k}} = \frac{(n+1)^{\underline{k+1}}}{k+1}} \qquad \text{para } k \geq 1$$

Haremos la demostración de esta fórmula F_n mediante una inducción completa sobre n.

1) Se cumple F_1

La fórmula F_1 es: $\displaystyle\sum_{x=0}^{1} x^{\underline{k}} = \frac{2^{\underline{k+1}}}{k+1} \iff 0^{\underline{k}} + 1^{\underline{k}} = \frac{2^{\underline{k+1}}}{k+1} \iff 1^{\underline{k}} = \frac{2^{\underline{k+1}}}{k+1}$

Para k = 1, ambos miembros valen 1 y para k > 1, ambos valen 0, de modo que la igualdad se cumple para todo valor de k.

2) $F_h \Rightarrow F_{h+1}$

Hipótesis.: $S_h = \displaystyle\sum_{x=0}^{h} x^{\underline{k}} = \frac{(h+1)^{\underline{k+1}}}{k+1}$ Tesis: $S_{h+1} = \displaystyle\sum_{x=0}^{h+1} x^{\underline{k}} = \frac{(h+2)^{\underline{k+1}}}{k+1}$

Tenemos $\quad S_{h+1} = S_h + (h+1)^{\underline{k}} = \dfrac{(h+1)^{\underline{k+1}}}{k+1} + (h+1)^{\underline{k}}$

Aplicamos la propiedad (3) vista anteriormente, para x = h+1 y k+1 en vez de k:

$$(h+1)^{\underline{k+1}} = (h+1)^{\underline{k}}\,(h+1-k),$$

resultando entonces:

$$S_{h+1} = \frac{(h+1)^{\underline{k}}(h+1-k)}{k+1} + (h+1)^{\underline{k}} = (h+1)^{\underline{k}}\left(\frac{h+1-k}{k+1}+1\right) = (h+1)^{\underline{k}}\left(\frac{h+2}{k+1}\right),$$

o sea: $\quad S_{h+1} = \dfrac{(h+2)^{\underline{k+1}}}{k+1} \qquad$ L.Q.Q.D.

<u>Algoritmo deducido para la sumatoria</u> :

La fórmula F_n demostrada nos da: $\quad \displaystyle\sum_{x=0}^{n} x^{\underline{k}} = \frac{(n+1)^{\underline{k+1}}}{k+1} \quad$ para $k \geq 1$.

Esta expresión nos recuerda la regla de Barrow para una integral definida ordinaria, válida para $k \neq -1$:

$$\int_0^{n+1} x^k\,dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^{n+1} = \frac{(n+1)^{k+1}}{k+1}$$

En nuestro caso de Cálculo Finito, usaremos esta analogía, definiendo:

$$\sum\nolimits_{x=0}^{n+1} x^{\underline{k}}\,\delta x = \sum_{x=0}^{n} x^{\underline{k}} \quad .$$

donde hemos usado el símbolo δx para el análogo de dx . En efecto, hemos hallado:

$$\sum\nolimits_{x=0}^{n+1} x^{\underline{k}}\,\delta x = \left[\frac{x^{\underline{k+1}}}{k+1}\right]_0^{n+1} = \frac{(n+1)^{\underline{k+1}}}{k+1} \quad ,$$

o sea un resultado similar al que nos da la regla de Barrow.

Resumiendo el resultado obtenido:

$$\boxed{\sum_{x=0}^{n} x^{\underline{k}} = \sum\nolimits_{x=0}^{n+1} x^{\underline{k}}\,\delta x = \frac{(n+1)^{\underline{k+1}}}{k+1}} \qquad \text{(F)}$$

Observación :
Este resultado, que es el que aplicaremos en nuestro problema básico, se puede generalizar empleando extremos cualesquiera para la sumatoria, o sea a y b en vez de 0 y n. En efecto, consideremos $\sum_{x=a}^{b} x^{\underline{k}}$ (a, b naturales cualesquiera con b ≥ a , k = 1, 2, 3, ……) . Tendremos:

$$\sum_{x=a}^{b} x^{\underline{k}} = \sum_{x=0}^{b} x^{\underline{k}} - \sum_{x=0}^{a-1} x^{\underline{k}}$$

De acuerdo a la fórmula (F), obtenemos:

$$\sum_{x=a}^{b} x^{\underline{k}} = \frac{(b+1)^{\underline{k+1}}}{k+1} - \frac{a^{\underline{k+1}}}{k+1}$$

Usando el símbolo asociado a la regla de Barrow del Cálculo Integral, hemos llegado a:

$$\boxed{\sum_{x=a}^{b} x^{\underline{k}} = \sum\nolimits_{x=a}^{b+1} x^{\underline{k}} \delta x = \frac{(b+1)^{\underline{k+1}} - a^{\underline{k+1}}}{k+1}} \qquad \text{(F´) ,}$$

o sea a la fórmula (F) con toda generalidad.

<u>Aplicación a algunos casos particulares</u> :

Volvemos a nuestro problema básico. Nos hemos propuesto calcular la sumatoria:

$$\sum_{x=0}^{n} x^{k} = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots\ldots\ldots\ldots + n^k$$

Resolveremos los casos k = 1, 2, 3, 4 aplicando la fórmula (F) hallada para la sumatoria de las caídas, mostrando cómo relacionar esta sumatoria con la sumatoria de las potencias.

De acuerdo a los resultados señalados en la página 2, tenemos:

$$x = x^{\underline{1}}$$

$$x^2 = x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$$

$$x^3 = x^{\underline{3}} + 3x^2 - 2x = x^{\underline{3}} + 3(x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}) - 2x^{\underline{1}} = x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$$

$$x^4 = x^{\underline{4}} + 6x^3 - 11x^2 + 6x = x^{\underline{4}} + 6(x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}) - 11(x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}) + 6x^{\underline{1}}$$

$$= \; x^{\underline{4}} + 6x^{\underline{3}} + 7x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$$

Tenemos así las cuatro primeras potencias expresadas en función de las cuatro primeras caídas. Podemos ahora aplicar la fórmula (F).

1) <u>Cálculo de $\sum_{x=1}^{n} x$</u>

$$\sum_{x=1}^{n} x = \sum_{x=0}^{n} x = \sum_{x=0}^{n} x^{\underline{1}} = \sum\nolimits_{x=0}^{n+1} x^{\underline{1}}\delta x = \left[\frac{x^{\underline{2}}}{2}\right]_0^{n+1} = \frac{(n+1)^{\underline{2}}}{2} \quad ,$$

o sea: $$\boxed{\sum_{x=1}^{n} x = \frac{n(n+1)}{2}} \quad ,$$

fórmula bien conocida para la suma de términos en progresión aritmética.

2) <u>Cálculo de $\sum_{x=1}^{n} x^2$</u>

$$\sum_{x=1}^{n} x^2 = \sum_{x=0}^{n} x^2 = \sum_{x=0}^{n} (x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}) = \sum\nolimits_{x=0}^{n+1} (x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}})\delta x = \left[\frac{x^{\underline{3}}}{3} + \frac{x^{\underline{2}}}{2}\right]_0^{n+1} =$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{(n+1)n}{2}$$

Operando: $$\boxed{\sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)}$$

.

5) <u>Cálculo de $\sum_{x=1}^{n} x^3$</u>

$$\sum_{x=1}^{n} x^3 = \sum_{x=0}^{n} x^3 = \sum_{x=0}^{n} (x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}) = \sum\nolimits_{x=0}^{n+1} (x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}})\delta x =$$

$$= \left[\frac{x^{\underline{4}}}{4} + x^{\underline{3}} + \frac{x^{\underline{2}}}{2}\right]_0^{n+1} = \frac{(n+1)^{\underline{4}}}{4} + (n+1)^{\underline{3}} + \frac{(n+1)^{\underline{2}}}{2}$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} + (n+1)n(n-1) + \frac{(n+1)n}{2}$$

Operando:

$$\boxed{\sum_{x=1}^{n} x^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2}$$

6) <u>Cálculo de $\sum_{x=1}^{n} x^4$</u>

$$\sum_{x=1}^{n} x^4 = \sum_{x=0}^{n} x^4 = \sum_{x=0}^{n} (x^{\underline{4}} + 6x^{\underline{3}} + 7x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}) = \sum_{x=0}^{n+1} (x^{\underline{4}} + 6x^{\underline{3}} + 7x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}})\delta x =$$

$$= \left[\frac{x^{\underline{5}}}{5} + \frac{3x^{\underline{4}}}{2} + \frac{7x^{\underline{3}}}{3} + \frac{x^{\underline{2}}}{2} \right]_0^{n+1} = \frac{(n+1)^{\underline{5}}}{5} + \frac{3(n+1)^{\underline{4}}}{2} + \frac{7(n+1)^{\underline{3}}}{3} + \frac{(n+1)^{\underline{2}}}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{5} + \frac{3(n+1)n(n-1)(n-2)}{2} + \frac{7(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{(n+1)n}{2}$$

Operando, se obtiene: $\sum_{x=1}^{n} x^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)$

Hallando las raíces del polinomio de 3^er grado, resulta:

$6n^3 + 9n^2 + n - 1 = (2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$ de modo que:

$$\boxed{\sum_{x=1}^{n} x^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)}$$

<u>Otra aplicación</u>

Aplicaremos el método expuesto para calcular sumatorias de productos con factores consecutivos, como por ejemplo, para el caso de 3 factores:

1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ………… + n(n+1)(n+2) ,

o sea $\sum_{x=1}^{n} x(x+1)(x+2)$, que también puede escribirse: $\sum_{x=1}^{n} (x+2)^{\underline{3}}$. Si cambiamos (x+2) por x, la suma se escribe $\sum_{x=3}^{n+2} x^{\underline{3}}$. Más generalmente, en el caso de k factores, nos

proponemos hallar $\sum_{x=k}^{n+k-1} x^{\underline{k}}$,que es una forma de escribir $\sum_{x=1}^{n} x(x+1)(x+2)........(x+k-1)$,
o sea: 1.2.3…..k + 2.3.4……(k+1) + ……………. + n(n+1)(n+2) ………..(n-k+1).
Aplicando la fórmula de "integración" en su forma general (F´), obtenemos:

$$\sum_{x=k}^{n+k-1} x^{\underline{k}} = \sum_{x=k}^{n+k} x^{\underline{k}} \delta x = \left[\frac{x^{\underline{k+1}}}{k+1} \right]_k^{n+k} = \frac{(n+k)^{\underline{k+1}}}{k+1} - \frac{k^{\underline{k+1}}}{k+1}$$

Pero, siendo k<k+1, tenemos $k^{\underline{k+1}} = 0$, de modo que nos queda:

$$\boxed{\sum_{x=1}^{n} x(x+1)(x+2)........(x+k-1) = \frac{(n+k)^{\underline{k+1}}}{k+1}}$$

En el ejemplo que mencionamos anteriormente, o sea en el caso k = 3, obtenemos:

$$\boxed{1.2.3 + 2.3.4 + \ldots\ldots\ldots.. + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

<u>Generalización del método</u> :

Para todo real x, definimos como **"<u>levante de x de orden n</u>"** (siendo n natural ≥1) al producto:

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)\ldots\ldots.. (x+n-1),$$

completando nuestra definición con $x^{\overline{0}}$ = 1, de modo que el "levante" queda definido para cualquier natural.

Ambas definiciones ($x^{\underline{n}}$ y $x^{\overline{n}}$) son llamadas también "potencias factoriales". Podemos ahora definir la "caída" de un real x con exponente negativo, o sea, para un real x ≠ -1 y un natural n cualquiera, hacemos la definición:

$$x^{\underline{-n}} = \frac{1}{(x+1)^{\overline{n}}} \quad ,$$

que se adopta para que todas las propiedades indicadas en la pág. 2 sean válidas también para exponente negativo, lo cual puede verificarse fácilmente.

Retomamos ahora la fórmula (F´) del tipo de "integral definida":

$$\sum_{x=a}^{b} x^{\underline{k}} = \sum\nolimits_{x=a}^{b+1} x^{\underline{k}}\delta x = \frac{(b+1)^{\underline{k+1}} - a^{\underline{k+1}}}{k+1} \quad ,$$

que habíamos establecido para k = 1, 2, 3, ……… y que llamaremos (F'_k) . Veremos que la fórmula es válida para cualquier entero k ≠ -1, o sea que debemos probar que es también válida para k = 0, -2, -3, ………..

1) <u>k = 0</u>

La fórmula (F'_0) sería:

$$\sum_{x=a}^{b} x^{\underline{0}} = \sum\nolimits_{x=a}^{b+1} x^{\underline{0}}\delta x = \frac{(b+1)^{\underline{1}} - a^{\underline{1}}}{1} \quad ,$$

o sea que el 2º miembro es b+1-a . En cuanto al 1er miembro, observando que la sumatoria tiene (b-a+1) sumandos 1, su resultado es (b-a+1), lo cual demuestra la fórmula.

2) <u>k = -2, -3, -4, ……..</u> , o sea k < 0 pero k ≠ -1

Probaremos la fórmula mediante una inducción completa sobre b

2.1) <u>Se cumple para b=a</u> Esta fórmula sería:

$$\sum_{x=a}^{a} x^{\underline{k}} = \frac{(a+1)^{\underline{k+1}} - a^{\underline{k+1}}}{k+1}$$

El primer miembro es $a^{\underline{k}}$. Siendo k negativo:

$$a^{\underline{k}} = \frac{1}{(a+1)^{\underline{-k}}} = \frac{1}{(a+1)(a+2)..........(a-k)} .$$

El segundo miembro es:

$$\frac{1}{k+1}\left[\frac{1}{(a+2)^{\underline{-k-1}}} - \frac{1}{(a+1)^{\underline{-k-1}}}\right] = \frac{1}{k+1}\left[\frac{1}{(a+2)(a+3)........(a-k)} - \frac{1}{(a+1)(a+2)........(a-k-1)}\right]$$

$$= \frac{1}{k+1}\frac{a+1-(a-k)}{(a+1)(a+2)............(a-k)} = \frac{1}{(a+1)(a+2)............(a-k)} \quad ,$$

de modo que coincide con el primer miembro.

2.2) Si se cumple para b = h, se cumple también para b = h+1

Llamamos S_h a la sumatoria de la hipótesis y S_{h+1} a la de la tesis. Tenemos:

$$S_{h+1} = S_h + (h+1)^{\underline{k}} = \frac{(h+1)^{\underline{k+1}} - a^{\underline{k+1}}}{k+1} + (h+1)^{\underline{k}}$$

Recordando que k < -1 , tenemos para la bajada de exponente negativo:

$$(h+1)^{\underline{k+1}} = (h+1)^{\underline{k}} (h-k+1)$$

Entonces:

S_{h+1}

$$= \frac{(h+1)^{\underline{k}}(h-k+1) - a^{\underline{k+1}}}{k+1} + (h+1)^{\underline{k}} = \frac{(h+1)^{\underline{k}}(h-k+1+k+1) - a^{\underline{k+1}}}{k+1}$$

$$= \frac{(h+1)^{\underline{k}}(h+2) - a^{\underline{k+1}}}{k+1} = \frac{(h+2)^{\underline{k+1}} - a^{\underline{k+1}}}{k+1} ,$$

que es justamente el resultado buscado en la tesis.

Conclusión : La fórmula (F´) es válida para todo k entero $\neq$ -1 .

Nos queda por analizar el caso k = -1 , o sea hallar $\sum_{x=a}^{b} x^{\underline{-1}}$

Por la definición vista, tenemos $x^{\underline{-1}} = \dfrac{1}{(x+1)^{\overline{1}}} = \dfrac{1}{x+1}$

Entonces:

$$\sum_{x=a}^{b} x^{\underline{-1}} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + ... + \frac{1}{b+1}$$

Pero llamando $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n}$ a la reducida n$^{\text{ésima}}$ de la serie armónica (con la convención $H_0 = 0$), resulta:

$$\sum_{x=a}^{b} x^{\underline{-1}} = H_{b+1} - H_a = \left[H_x\right]_a^{b+1}$$

Del mismo modo que en caso de la integral $\int_a^b x^k dx$ el caso k = -1 representa una excepción para la primitiva de x^k , debiendo emplear un logaritmo neperiano para la primitiva de x^k en vez de una función potencial, resulta que para nuestra sumatoria, en el caso k = -1 , debemos usar un número armónico en vez de una potencia factorial (caída) para escribir la "primitiva" de $x^{\underline{k}}$.

<u>Resumiendo</u> : La fórmula general para la suma de caídas es:

$$\sum_{x=a}^{b} x^{\underline{k}} = \sum\nolimits_{a}^{b+1} x^{\underline{k}}\delta x = \begin{cases} \left[\dfrac{x^{\underline{k+1}}}{k+1}\right]_{a}^{b+1} & si\ \ k \neq -1 \\ \left[H_x\right]_{a}^{b+1} & si\ \ k = -1 \end{cases}$$

$con\ k\ entero\ cualquiera, a\ y\ b\ naturales\ (b \geq a)\ y,$
$eventualmente,\ H_o = 0$

<u>Aplicación al cálculo de sumas de algunas series convergentes</u> :

<u>Ejemplo 1</u> : Comenzamos calculando la suma $\displaystyle\sum_{x=1}^{n} \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, que es la reducida n[ésima] de la serie correspondiente.

Es bien conocido el método que consiste en descomponer $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ en fracciones simples, empleando luego las reducidas de la serie armónica para sumar las fracciones simples.

Queremos aquí mostrar la potencia del Cálculo Finito para obtener la suma buscada.

Se trata de calcular $\displaystyle\sum_{x=1}^{n} \frac{1}{(x+1)^{\overline{3}}} = \sum_{x=1}^{n} x^{\underline{-3}}$. Aplicamos la fórmula general hallada anteriormente :

$$\sum_{x=1}^{n} x^{\underline{-3}} = \sum\nolimits_{x=1}^{n+1} x^{\underline{-3}}\delta x = \left[\frac{x^{\underline{-2}}}{-2}\right]_{1}^{n+1} = -\frac{1}{2}\left[(n+1)^{\underline{-2}} - 1^{\underline{-2}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n+2)^{\overline{2}}} - \frac{1}{2^{\overline{2}}}\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n+2)(n+3)} - \frac{1}{2.3}\right] ,$$

o sea: $$\underline{\sum_{x=1}^{n} \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}} = \underline{\frac{1}{12} - \frac{1}{2(n+2)(n+3)}}$$

Este resultado nos permite evaluar inmediatamente la suma de la serie correspondiente:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{12}}$$

Ejemplo 2 :Como vimos en el primer ejemplo, para poder aplicar nuestra fórmula general, es necesario que los factores del denominador sean consecutivos y que el primero de ellos sea (x+1). En caso de que los factores sean consecutivos pero que el primero no sea (x+1), resutta muy simple llevarlo a esa forma con un simple corrimiento de la variable . Veamos por ejemplo esta sumatoria:

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{1}{(x+4)(x+5)(x+6)}$$

Hacemos el cambio x+4 = X+1, obteniendo para esa sumatoria:

$$S_n = \sum_{X=4}^{n+3} \frac{1}{(X+1)(X+2)(X+3)} = \sum_{X=4}^{n+3} X^{\underline{-3}}$$

Tenemos ahora la forma vista en el primer ejemplo y sólo debemos cambiar los límites de la sumatoria:

$$S_n = \sum\nolimits_{X=4}^{n+4} X^{\underline{-3}} \delta X = -\frac{1}{2}\left[(n+4)^{\underline{-2}} - 4^{\underline{-2}}\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n+5)^{\overline{2}}} - \frac{1}{5^{\overline{2}}}\right]$$

,

o sea: $\underline{S_n = \frac{1}{60} - \frac{1}{2(n+5)(n+6)}}$

Deducimos de aquí la suma de la serie correspondiente:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)(n+6)} = \frac{1}{60}}$$

Ejemplo 3: Veamos ahora el caso de factores no consecutivos, por ejemplo:

$$S_n = \sum_{x=1}^{n} \frac{1}{x(x+3)}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x(x+3)} = \frac{1/3}{x} - \frac{1/3}{x+3}$$

Entonces: $S_n = \frac{1}{3}\sum_{x=1}^{n} \frac{1}{x^{\bar{1}}} - \frac{1}{3}\sum_{x=1}^{n} \frac{1}{(x+3)^{\bar{1}}}$

Las dos sumas pueden calcularse aplicando la fórmula de “integración” el caso k = -1, o sea haciendo intervenir la función H_x , con un corrimiento conveniente de la variables. Se llega entonces a:

$$S_n = \frac{11}{18} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right)$$

y por lo tanto la suma de la serie es: $S = \frac{11}{18}$

Pero en este caso resulta más práctico emplear el método clásico, Trabajando con la reducida H_n de la serie armónica. A partir de la descomposición del término general en fracciones simples, obtenemos inmediatamente:

$$S_n = \frac{1}{3}H_n - \frac{1}{3}\left(H_{n+3} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}H_n - \frac{1}{3}\left(H_n + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{11}{6}\right)$$

y por lo tanto la suma de la serie es

$$\boxed{S = \frac{11}{18}}$$

<u>CAPÍTULO 5</u> – ALGUNOS APORTES PERSONALES SOBRE PROPIEDADES SIMPLES PERO NO TRIVIALES

En este capítulo, proponemos al lector algunas herramientas que le pueden ser útiles en situaciones relacionadas con los temas planteados: algo de Cálculo, algo de Álgebra Lineal, algo de Aritmética, algo de Matemática Discreta….

5.1 – <u>Aplicación de las ecuaciones en diferencias finitas al Cálculo Integral</u>

En los textos clásicos de Cálculo Integral, aparece en las tablas un gran número de casos en los que, conteniendo el integrando una variable natural n, se expresa la integral I_n en función de I_{n-1}, o sea que se propone una fórmula de recurrencia cuya aplicación reiterada desciende el valor de n hasta que se llega a una integral inmediata. Esa recurrencia se obtiene en general aplicando una integración por partes en la integral original. Citamos algunos ejemplos clásicos:

$$\int x^n e^{ax}\,dx \qquad \int \frac{e^{ax}}{x^n}\,dx \qquad \int x^\alpha L^n x\,dx \qquad \int \frac{x^\alpha}{L^n x}\,dx$$

Proponemos en este párrafo obtener una fórmula que nos dé directamente la integral I_n en función de n, para evitar así numerosas reiteraciones de integración, que pueden ser engorrosas para valores relativamente elevados de n.

Para ilustrar el método a seguir, basado en una aplicación de las ecuaciones lineales en diferencias finitas, hemos elegido nuestro tercer ejemplo, o sea la integral:

$$\int x^\alpha L^n x\,dx \qquad \alpha \text{ real } \neq -1$$

n natural : n = 0,1, 2, 3, ...

La fórmula de recurrencia que aparece en las tablas y que se obtiene fácilmente mediante una integración por partes es:

$$\int x^\alpha L^n x\,dx \;=\; \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}L^n x - \frac{n}{\alpha+1}\int x^\alpha L^{n-1}x\,dx \quad ,$$

válida para n = 1, 2, 3, ... Esta fórmula permite naturalmente hallar la integral planteada, aplicando reiteradamente una recurrencia descendente en n, hasta lograr hacer desaparecer el factor logarítmico (lo cual se logra al aplicar una última recurrencia para n = 1).

Observemos que el caso α = -1 se resuelve directamente por el simple cambio de variable Lx = t, obteniéndose:

$$\int \frac{L^n x}{x} dx = \frac{L^{n+1} x}{n+1} + C \text{ , válido para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Recordatorio previo

Dada la ecuación en diferencias finitas:

$$v_{n+1} = f_n v_n + g_n \quad ,$$

lineal de primer orden, donde v_n es la sucesión incógnita y f_n, g_n son sucesiones dadas, la teoría muestra que su solución general es (ver nuestro anterior "Viajando por rincones matemáticos", primer itinerario, págs. 191, 192):

$$v_n = (C + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{g_i}{\varphi_{i+1}})\varphi_n \quad ,$$

donde $\varphi_n = \prod_{i=1}^{n-1} f_i$ y C es una constante (o sea independiente de n) arbitraria.

Planteo del problema

Para evitar indeterminaciones en las integrales que plantearemos (recordar constantes aditivas arbitrarias en las integrales indefinidas), trabajaremos con integrales definidas.

Sea la sucesión de funciones:

$$u_n(x) = \int_1^x t^\alpha L^n t \, dt \quad , \quad \text{con } \alpha \text{ real} \neq -1$$

n natural: n = 0, 1, 2, 3, ...

Para n = 1, 2, 3, ..., podemos proceder integrando por partes:

$$u_n = \left[\frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1} L^n t \right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1} n(L^{n-1}t) \frac{1}{t} dt \quad ,$$

o sea:

$$u_n = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} L^n x - \frac{n}{\alpha+1} \int_1^x t^\alpha L^{n-1} t \, dt \quad ,$$

o también:

$$u_n = -\frac{n}{\alpha+1} u_{n-1} + \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} L^n x$$

Si llamamos $u_n = v_{n+1}$, obtenemos:

$$\underline{v_{n+1} = -\frac{n}{\alpha+1} v_n + \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} L^n x} \quad , \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

o sea una ecuación en diferencias finitas del tipo del recordatorio previo.

Para esta ecuación, con la notación mencionada:

$$f_n = -\frac{n}{\alpha+1} \qquad\qquad g_n = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} L^n x$$

Entonces:

$$\varphi_n = \prod_{i=1}^{n-1} \left(-\frac{i}{\alpha+1}\right) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(\alpha+1)^{n-1}}$$

$$\frac{g_i}{\varphi_{i+1}} = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} L^i x.(-1)^i \frac{(\alpha+1)^i}{i!} = (-1)^i \frac{(\alpha+1)^{i-1}}{i!} x^{\alpha+1} L^i x \quad ,$$

donde i = 1, 2, 3, ..., n-1

Se deduce:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{g_i}{\varphi_{i+1}} = x^{\alpha+1} \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \frac{(\alpha+1)^{i-1}}{i!} L^i x$$

De donde, aplicando la fórmula vista para la solución general:

$$v_n(x) = \left[C(x) + x^{\alpha+1} \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \frac{(\alpha+1)^{i-1}}{i!} L^i x \right] (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(\alpha+1)^{n-1}}$$

y por lo tanto:

$$\underline{u_n(x) = \left[C(x) + x^{\alpha+1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{(\alpha+1)^{i-1}}{i!} L^i x \right] (-1)^n \frac{n!}{(\alpha+1)^n}} \qquad (1)$$

Para hallar C(x), empleamos la condición inicial de la sucesión, o sea que evaluamos $u_1(x)$ en esa expresión general de la sucesión haciendo n = 1 :

$$u_1(x) = \left[C(x) - x^{\alpha+1} Lx \right] \left(-\frac{1}{\alpha+1}\right) \qquad (2)$$

Por otra parte, $u_1(x) = \int_1^x t^\alpha Lt\,dt$ puede hallarse directamente integrando por partes:

$$u_1(x) = \left[\frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1} Lt\right]_1^x - \frac{1}{\alpha+1}\int_1^x t^\alpha dt \quad ,$$

o sea:

$$u_1(x) = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} Lx - \frac{1}{(\alpha+1)^2} x^{\alpha+1} + \frac{1}{(\alpha+1)^2} \qquad (3)$$

Igualando las dos expresiones (2) y (3) de $u_1(x)$, podemos despejar C(x), resultando:

$$C(x) = \frac{1}{\alpha+1}(x^{\alpha+1} - 1)$$

Reemplazando C(x) en (1), obtenemos la expresión buscada para la sucesión:

$$\underline{u_n(x) = \left[x^{\alpha+1}\left(\frac{1}{\alpha+1} + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \frac{(\alpha+1)^{i-1}}{i!} L^i x\right) - \frac{1}{\alpha+1}\right](-1)^n \frac{n!}{(\alpha+1)^n}}$$

Finalmente, dado que la derivada de $u_n(x) = \int_1^x t^\alpha L^n t\,dt$ es $x^\alpha L^n x$, resulta que la integral indefinida buscada es:

$$\int x^\alpha L^n x\,dx = u_n(x) + C ,$$

siendo C la constante (o sea independiente de x) aditiva arbitraria de integración; entonces:

$$\int x^\alpha L^n x\,dx = x^{\alpha+1}\left(\frac{1}{\alpha+1} + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \frac{(\alpha+1)^{i-1}}{i!} L^i x\right)(-1)^n \frac{n!}{(\alpha+1)^n} + (-1)^{n+1}\frac{n!}{(\alpha+1)^{n+1}} + C$$

Llamando $(-1)^{n+1}\frac{n!}{(\alpha+1)^{n+1}} + C = \not\subset$, que también es una constante arbitraria (o sea independiente de x), resulta en definitiva:

$$\boxed{\int x^{\alpha} L^{n} x \, dx = x^{\alpha+1}\left(\frac{1}{\alpha+1}+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}\,\frac{(\alpha+1)^{i-1}}{i!}\,L^{i} x\right)(-1)^{n}\,\frac{n!}{(\alpha+1)^{n}}+\not\subset}$$

Observación : Si interpretamos la sumatoria $\sum_{i=1}^{0}$ como 0, la fórmula es válida también para n = 0, pues nos da:

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\not\subset \qquad ,$$

lo cual es correcto. Con esta convención, nuestra fórmula vale para n = 0, 1, 2, 3, ...

Aplicación : Aplicaremos la fórmula hallada en algunos casos particulares, haciendo efectivo el cálculo de la sumatoria de n términos.

1) $\int x^{3} L^{2} x \, dx$, o sea el caso α = 3, n = 2.

$$\int x^{3} L^{2} x \, dx = x^{4}\left(\frac{1}{4}-Lx+\frac{4}{2}L^{2} x\right)\frac{2}{16}+\not\subset \qquad ,$$

o sea:

$$\int x^{3} L^{2} x \, dx = x^{4}\left(\frac{1}{4}L^{2} x-\frac{1}{8}Lx+\frac{1}{32}\right)+\not\subset$$

2) $\int x L^{4} x \, dx$, o sea el caso α = 1, n = 4

$$\int x L^{4} x \, dx = x^{2}\left(\frac{1}{2}-Lx+\frac{2}{2}L^{2} x-\frac{4}{6}L^{3} x+\frac{8}{24}L^{4} x\right)\frac{24}{16}+\not\subset \qquad ,$$

o sea:

$$\int x L^{4} x \, dx = x^{2}\left(\frac{1}{2}L^{4} x-L^{3} x+\frac{3}{2}L^{2} x-\frac{3}{2}Lx+\frac{3}{4}\right)+\not\subset$$

Hallamos así las integrales buscadas, sin necesidad de aplicar reiteradas recurrencias; serían 3 integraciones en el primer ejemplo ($n = 2 \to 1 \to 0$) y 5 en el segundo ($4 \to 3 \to 2 \to 1 \to 0$), aplicando en cada caso integración por partes en las n primeras integraciones (la última es inmediata).

5.2 – Un par de notables propiedades acerca de los valores propios de una matriz

5.2.1 – Una matriz particular

Sea la siguiente matriz , n x n, con k real:

$$M = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \ldots\ldots\ldots 1 \\ 1 & k & 1 \ldots\ldots\ldots 1 \\ \ldots\ldots\ldots & & \\ 1 & 1 & 1 \ldots\ldots\ldots k \end{bmatrix} \qquad , \qquad n \geq 2$$

formada por todos k en la diagonal principal y unos en los demás lugares. Nos proponemos hallar sus valores propios.
Se trata de las raíces de la ecuación en λ:

$$\begin{vmatrix} k-\lambda & 1 & 1 \ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\ 1 & k-\lambda & 1 \ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ 1 & 1 & 1 \ldots\ldots\ldots k-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Poniendo $k - \lambda = x$, debemos resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\ 1 & x & 1 \ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ 1 & 1 & 1 \ldots\ldots\ldots\ \ x \end{vmatrix} = 0$$

1 es una solución trivial; buscamos eventuales soluciones diferentes de 1.

Llamamos Δ_n al determinante del primer miembro. Reemplazamos la primera fila por (1ª. menos 2ª.); sabemos que el determinante no cambia:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x-1 & 1-x & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 1 & x & 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1 & 1 & 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x \end{vmatrix} \qquad (n \times n)$$

Desarrollamos por la primera fila:

$$\Delta_n = (x-1)\,\Delta_{n-1} + (x-1)\,D_n\,,$$

donde

$$D_n = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\ 1 & x & 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1 & 1 & 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x \end{vmatrix} \qquad (n-1) \times (n-1)$$

Calculemos D_n ; reemplazando la primera fila por (1ª. menos 2ª.) , nos queda:

$$D_n = (x-1)\,D_{n-1} \;\Rightarrow\; D_n = (x-1)^{n-2}$$

Entonces:

$$\Delta_n = (x-1)\,\Delta_{n-1} + (x-1)^{n-1}$$

Para hallar Δ_n , tenemos pues una ecuación lineal en diferencias finitas:

$\underline{\Delta_n - a\,\Delta_{n-1} = a^{n-1}}$, donde hemos puesto $\underline{a = x-1}$

(supondremos momentáneamente $a \neq 0$ pues estamos buscando soluciones $x \neq 1$)
La ecuación homogénea asociada tiene la solución general Ca^n ; aplicando el método de variación de la constante C, se halla la solución particular $(n-1)\,a^{n-1}$ para la no homogénea. La solución general de la ecuación es entonces $\Delta_n = C\,a^n + (n-1)a^{n-1}$. Para hallar C, usamos

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x^2 - 1\text{ , de modo que } x^2 - 1 = Ca^2 + a \;\Rightarrow$$

$$C = \frac{x^2 - a - 1}{a^2} = \frac{(a+1)^2 - a - 1}{a^2} = \frac{a+1}{a} \quad (\text{recordar } a \neq 0)$$

Entonces:

$$\Delta_n = \frac{a+1}{a} a^n + (n-1)a^{n-1} = a^{n-1}(a+n)$$

Esta solución es válida también para a = 0 pues nos daría $\Delta_n = 0$, que obviamente sería la solución de la ecuación en diferencias finitas. Volviendo a la variable x, resultó entonces:

$$\Delta_n(x) = (x-1)^{n-1}(x-1+n)$$

y las raíces son 1, de orden n-1, y -n+1, simple. La solución trivial 1 resultó con orden de multiplicidad n-1. Recordando $x = k - \lambda$, llegamos a esta expresión del polinomio característico de M:

$$\Delta_n(\lambda) = (k-1-\lambda)^{n-1}(k-1+n-\lambda) = (-1)^n (\lambda-k+1)^{n-1}(\lambda-k+1-n)$$

<u>Conclusión</u> : Los valores propios de M son

k – 1 , de orden n – 1
k – 1 + n , simple

Pueden hacerse dos verificaciones simples:

1) Si k = 1, los valores propios son **0** (de orden n-1) y **n** simple.
2) En el caso trivial n = 1, nuestro resultado sigue siendo válido: **k-1** de orden 0 (o sea que k-1 no es un valor propio) y **k** simple, de modo que el único valor propio es **k** simple, como es obvio.

5.2.2 – <u>Vinculación entre los valores propios de una matriz y los del cuadrado de esa matriz</u>

Sea A una matriz cuadrada n x n y A^2 el cuadrado de esa matriz, que es también n x n. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n$ los valores propios de A (eventualmente repetidos en caso de multiplicidad algebraica); entonces, llamando I a la matriz identidad de dimensión nxn:

$$\det(A - \lambda I) \equiv (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots\ldots\ldots\ldots(\lambda - \lambda_n)$$

$$\Rightarrow \quad \det(A + \lambda I) \equiv (\lambda + \lambda_1)(\lambda + \lambda_2)\ldots\ldots\ldots\ldots(\lambda + \lambda_n)$$

Se deduce:

$$(1) \qquad \begin{cases} \det(A - \sqrt{\lambda}\, I) \equiv (-1)^n(\sqrt{\lambda} - \lambda_1)(\sqrt{\lambda} - \lambda_2)\ldots\ldots\ldots\ldots(\sqrt{\lambda} - \lambda_n) \\ \det(A + \sqrt{\lambda}\, I) \equiv \quad (\sqrt{\lambda} + \lambda_1)(\sqrt{\lambda} + \lambda_2)\ldots\ldots\ldots\ldots(\sqrt{\lambda} + \lambda_n) \end{cases}$$

(Si λ es real negativo o imaginario, tomamos para $\sqrt{\lambda}$ una cualquiera de las dos determinaciones de la raíz cuadrada, pero la misma en las dos expresiones anteriores).

Pero siendo $A^2 - \lambda I \equiv (A + \sqrt{\lambda}\ I)(A - \sqrt{\lambda}\ I) \Rightarrow$

$$\det(A^2 - \lambda I) \equiv \det(A+\sqrt{\lambda}\ I)\det(A-\sqrt{\lambda}\ I) \quad ,$$

se obtiene, usando (1):

$$\det(A^2 - \lambda I) \equiv (-1)^n (\lambda - \lambda_1^2)(\lambda - \lambda_2^2) \ldots\ldots\ldots\ldots (\lambda - \lambda_n^2)$$

Resulta que los valores propios de A^2 son $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots\ldots, \lambda_n^2$.

<u>Conclusión</u> : Los valores propios de A^2 son los cuadrados de los valores propios de A.

<u>Consecuencia</u> : Si A tiene dos valores propios opuestos, $\lambda_i = -\lambda_j$, resulta $\lambda_i^2 = \lambda_j^2$ y por lo tanto tenemos un valor propio de A^2 que es por lo menos de orden de multiplicidad 2. Entonces:

"Si A^2 tiene un valor propio α simple, sólo una de las raíces cuadradas de α es valor propio de A"

<u>Dos demostraciones más simples:</u>

1) <u>Por la vía analítica</u> :
Si λ_i es un valor propio de M:
$M^2 - \lambda_i^2 I = (M + \lambda_i I)(M - \lambda_i I) \Rightarrow \det(M^2 - \lambda_i^2 I) = \det(M + \lambda_i I)\det(M - \lambda_i I)$
Pero $\det(M - \lambda_i I) = 0$; entonces $\det(M^2 - \lambda_i^2 I) = 0 \Rightarrow$ **<u>λ_i^2 es un valor propio de M^2</u>**

2) <u>Por vía algebraica</u> : (considerando M como la matriz de una transformación lineal)
Si M es la matriz n x n de una transformación lineal de un espacio vectorial de dimensión n en sí mismo, se tiene $M\vec{u} = \lambda\vec{u}$, siendo λ un valor propio de M y $\vec{u}$ un vector propio correspondiente. Entonces:

$$M\vec{u} = \lambda\vec{u} \Rightarrow \quad M(M\vec{u}) = M(\lambda\vec{u}) \Rightarrow \quad M^2\vec{u} = (M\lambda)\vec{u} \Rightarrow \quad M^2\vec{u} = (\lambda M)\vec{u} \Rightarrow$$
$$M^2\vec{u} = \lambda(M\vec{u}) \Rightarrow M^2\vec{u} = \lambda(\lambda\vec{u}) \Rightarrow M^2\vec{u} = \lambda^2\vec{u}$$

Entonces **<u>λ^2 es un valor propio de M^2</u>** .

5.3 – Una notable propiedad de las progresiones aritméticas con términos enteros

Sea una progresión aritmética con términos enteros cualesquiera. Mostraremos que el producto de cuatro términos consecutivos es siempre igual a la diferencia de dos cuadrados de números enteros.
Sean **a-d. a, a+d, a+2d** cuatro términos consecutivos de la progresión, donde hemos llamado **a** al segundo de ellos y **d** a la razón. El producto en cuestión es:

$$P = (a-d)a(a+d)(a+2d)$$

Asociamos los dos primeros factores y los dos últimos:

$$P = (a^2 – ad)(a^2 + 3ad + 2d^2) ,$$

o también, reescribiendo ambos factores:

$$P = [(a^2 + ad + d^2) – (2ad + d^2)][(a^2 + ad + d^2) + (2ad + d^2)]$$

Aprovechando el producto notable $(A – B)(A + B) = A^2 – B^2$, nos queda:

$$P = (a^2 + ad + d^2)^2 – (2ad + d^2)^2 \qquad \text{L.Q.Q.D}$$

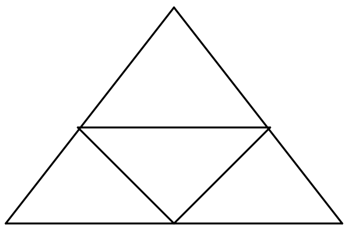
Con las hipótesis del planteo, los dos paréntesis son obviamente números enteros.

5.4 – Algunos ejemplos de aplicación del “principio del palomar”

Este principio es de enunciado muy simple y establece una propiedad que es muy obvia:
“Siendo n>m, si n palomas se posan en m casilleros, habrá por lo menos un casillero con más de una paloma”
En idioma inglés, el principio se llama “pigeonhole principle” (lo designaremos como PHP) y también es conocido como “principio de Dirichlet”. Un enunciado más formal sería el siguiente:
“Siendo A y B dos conjuntos finitos, llamando [A] y [B] a su cantidad respectiva de elementos, existirá ente ellos una correspondencia 1-1 si y sólo si [A] = [B]”
Es conocido el famoso ejemplo que cuenta que en una asamblea con más de 365 personas, existe entre ellas por lo menos un par de personas que coinciden en su día de cumpleaños. Este ejemplo es obviamente una ilustración del principio del palomar.Pero naturalmente existen ejemplos mucho más sutiles donde el principio del palomar permite resolver problemas más complejos.
Daremos varios ejemplos de aplicación, en general relativamente simples, haciendo notar que existen aplicaciones más avanzadas, que el lector podrá consultar por ejemplo en el libro “Proofs on THE BOOK” citado en la bibliografía que recomendamos. Aconsejamos al lector de tratar de demostrar en cada caso la propiedad enunciada sin consultar la solución pues no solamente ejercitará así sus aptitudes creativas sino que quizás obtenga de ese modo soluciones más simples o más interesantes que las que proponemos.

Ejemplo 1 : Si en el interior de un triángulo equilátero de lado 1 se eligen 5 puntos arbitrariamente, siempre habrá dos de ellos que disten entre sí menos de 0,5

Solución:



En un triángulo equilátero de lado a, dos puntos interiores elegidos arbitrariamente distan siempre entre sí menos de a, de modo que si en el triángulo dado formamos 4 triángulos equilátero a partir de los puntos medios de los lados (como indica la figura), que son de lado 0,5, cualquier par de puntos interiores en esos triángulos distan entre sí menos de 0,5. Pero los puntos dados eran 5 y los triángulos son 4; por el PHP habrá forzosamente por lo menos dos en uno de los 4 triángulos, lo cual demuestra la propiedad.

Ejemplo 2 : En un plano, se dan 25 puntos tales que entre tres cualesquiera de ellos siempre hay dos que distan entre sí menos de 1. Mostrar que existe siempre un círculo de radio 1 que contiene por lo menos 13 de los puntos dados.

Solución: Entre los 25 puntos dados, tomamos uno cualquiera, A, y consideramos el círculo de centro A y radio 1.Si todos los demás puntos son interiores a ese círculo, la propiedad está demostrada. De lo contrario, habrá por lo menos un punto B que está sobre la circunferencia de ese círculo o fuera del mismo. Se tendrá pues $d(A,B) \geq 1$. Pero al tomar un tercer punto C cualquiera entre los 23 restantes, al considerar la terna (A,B,C), la hipótesis del problema nos dice que debe cumplirse una de estas dos condiciones: $d(C,A) < 1$ o bien $d(C,B) < 1$, o sea que C debe ser interior al círculo de centro A y radio 1 o bien interior al círculo de centro B y radio 1. Los posibles puntos C son 23 y debemos colocarlos en el interior de esos dos círculos; uno de estos dos círculos contendrá entonces por lo menos 12 puntos C, que cumplirán pues $d(C,A) < 1$ o bien $d(C,B) < 1$. Juntados con A o con B, tendremos pues 13 puntos contenidos en un círculo de radio 1.

Ejemplo 3: Siendo P(x) un polinomio de coeficientes enteros, probar que si para tres diferentes enteros a,b,c resulta que P(x) toma el valor 2, no existe ningún entero para el cual P(x) toma el valor 3.

Solución : Sea $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots.. + a_nx^n$, con los a_i todos enteros.

Se sabe que P(a) = P(b) = P(c) = 2. Debemos demostrar que no exite ningún entero d tal que P(d) = 3.
Razonaremos por el absurdo. Supongamos que existe un cierto entero d tal que P(d) = 3. Tendremos:

$$P(d) - P(a) = a_1(d-a) + a_2(d^2-a^2) + a_3(d^3-a^3) + \ldots\ldots + a_n(d^n-a^n)$$

Al ser todos esos sumandos múltiplos de (d-a) resulta :

$$P(d) - P(a) = \text{ múltiplo de } (d-a)$$

Pero se sabe que P(d) – P(a) = 3 – 2 = 1; entonces (d – a) es un divisor de 1; Análogamente, (d – b) y (d – c) son divisores de 1. Dado que 1 admite solamente los divisores 1 y -1 , deducimos que (d – a), (d – b), (d – c) valen cada uno 1 o – 1. Tenemos pues 3 números para 2 valores posibles; ; por el PHP , hay dos de los tres números que coinciden. Esto es absurdo ya que entre a, b y c no hay dos iguales.

<u>Ejemplo 4</u> : Probar que existe una potencia entera de 3 que termina en 001.

<u>Solución</u> : Comenzamos por observar que la división por 1000 de cualquier número natural tiene 1000 restos posibles: 0, 1, 2, ……999. Pero consideremos las siguientes potencias de 3:

$$3^0, 3^1, 3^2, \ldots\ldots\ldots\ldots, 3^{1000}$$

Se trata de 1001 valores posibles. Por el PHP habrá por lo menos dos, por ejemplo 3^n y 3^m (n>m), que tendrán el mismo resto r al dividirlos por 1000:

$$\begin{cases} 3^n = 1000q + r \\ 3^m = 1000q' + r \end{cases}$$

Se desprende $3^n - 3^m = 1000(q - q')$, por lo cual $3^n - 3^m$ es divisible por 1000. Pero $3^n - 3^m = 3^m(3^{n-m} - 1)$; dado que 3^m obviamente no es divisible por 1000 , el otro factor $(3^{n-m} - 1)$ deberá serlo:

$$3^{n-m} - 1 = 1000k \Rightarrow 3^{n-m} = 1000k + 1$$

Esta potencia de 3 termina obviamente con 001.

<u>Ejemplo 5</u> : Considerar los primeros 2n naturales 1, 2, 3, ………, 2n y elegir entre ellos (n + 1) cualesquiera. Probar que entre estos (n + 1) números, hay siempre dos que son primos entre sí.

<u>Solución</u> : Si del conjunto {1, 2, 3, ……, 2n} queremos extrer números no consecutivos, el sub-conjunto de mayor cantidad de elementos tiene n

números:: no podemos extraer más de n números no consecutivos. Todo sub-conjunto de números no consecutivos contiene a lo sumo por n elementos. Por lo tanto si extraemos un conjunto de (n + 1) elementos, por el PHP habrá forzosamente por lo menos 2 consecutivos. Éstos son obviamente primos entre sí.

Ejemplo 6 : Sean n naturales dados en un cierto orden:

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \ldots\ldots\ldots\; a_n\,,$$

entre los cuales puede eventualmente haber repeticiones. Probar que en ese conjunto existe siempre un sub-conjunto de consecutivos cuya suma es múltiplo de n.:

Solución: Consideramos el conjunto $S = \{S_0 , S_1 , S_2 , \ldots\ldots, S_n\}$ formado mediante las sumas reducidas del conjunto dado:

$$S_0 = 0$$
$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots\ldots + a_n$$

Se trata de (n + 1) números; al dividir cada uno de ellos por n, el resto obtenido puede ser 0, 1, 2, ….., n - 1 , que son n valores posibles. Por el PHP, en el conjunto S debe haber por lo menos dos elementos que generan el mismo resto; llamemos S_h y S_k a dos tales elementos, o sea que cumplen $S_h \equiv S_k$ (módulo n). Entonces $S_k - S_h \equiv 0$ (módulo n). Pero, suponiendo k>h:

$$S_k - S_h = a_{h+1} + a_{h+2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_k \quad ,$$

de modo que: $a_{h+1} + a_{h+2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_k \equiv 0$ (módulo n). Queda pues probado que $\sum_{i=h+1}^{k} a_i$ es múltiplo de n.

5.5 – Interferencia de señales de telecomunicaciones

Sean n señales que inciden en m puntos (m ≥ n). Queremos determinar cuál es la probabilidad de que no haya interferencia.

Los casos posibles de incidencia son los arreglos con repetición de m elementos tomados de n en n, o sea que su cantidad es AR_n^m = m^n.. Los casos en que no hay interferencia (señales distintas inciden en puntos distintos) son los arreglos simples de m elementos tomados de n en n , cuya cantidad es $A_n^m = \dfrac{m!}{(m-n)!}$. Por lo tanto la probabilidad de no interferencia (cociente entre la cantidad total de casos favorables y la cantidad total de casos) será $p = \dfrac{A_n^m}{AR_n^m}$, o sea:

$$\boxed{p = \frac{m!}{(m-n)!\,m^n}}$$

<u>Ejemplo</u> : En un proyecto de telecomunicaciones, puede tenerse 50 señales que inciden en 15000 puntos, o sea n = 50, m= 15000. La probabilidad de que esas señales no interfieran resulta ser, realizando el cálculo mediante la fórmula anterior, aproximadamente 0,0597, o sea que en un 5,97% de los casos no habrá interferencia, o sea que la habrá en un 94,03% de los casos, aproximadamente.

<u>Observación</u> : El problema se puede plantear formalmente usando un lenguaje algebraico: siendo m ≥ n, consideramos todas las funciones que aplican un conjunto de n elementos en un conjunto de m elementos. La cantidad de esas funciones es AR_n^m , de las cuales A_n^m son inyectivas. Éstas últimas son las que corresponden a la no interferencia, de modo que reencontramos el resultado visto.

En el caso particular m = n, la cantidad total de funciones es m^m , de las cuales m! son inyectivas; pero en este caso particular las funciones inyectivas son también sobreyectivas, de modo que son biyectivas. Así, si m = n = 3, hay 27 funciones, de las cuales m! = 6 son biyectivas; las 21 funciones restantes no son ni inyectivas ni sobreyectivas.

<u>CAPÍTULO 6</u> – UN BREVE ESPARCIMIENTO PARA EL LECTOR

Este capítulo está previsto para que el lector pueda tomarse un breve descanso y abandone la formulación matemática, pero los ejemplos propuestos esconden una matemática creativa sin necesidad de aplicar conocimientos específicos. Es para personas amantes de los enigmas y capaces de apreciar la belleza del razonamiento lógico pero que poseen una formación universitaria que las induce a desdeñar los crucigramas o los acertijos de aritmética ingenua.
A pesar de lo indicado, el primero de los problemas requiere algún conocimiento de la teoría combinatoria, pero lo hemos incluído en este capítulo porque su enunciado es accesible en cualquier nivel de educación.
Para que el lector disfrute con su búsqueda de las soluciones, hemos escrito en forma separada las soluciones que proponemos (al final del capítulo) Por supuesto nos encantaría que el lector creativo encuentre soluciones más simples o más atractivas.

6.1 – <u>Los boletos de la suerte</u>

Los boletos de transporte colectivo tienen un número de serie de 5 dígitos La cantidad de boletos es pues 100000 (existe el boleto 00000). Es una vieja costumbre decir que si esas cifras suman “21”, se tendrá buena suerte. Se pregunta: **¿cuántos son los boletos de la suerte?**

6.2 – <u>Las tres hijas de Juan</u>

Juan tenía en sus épocas de colegial un compañero de clase que se destacaba de los demás niños por sus notables aptitudes para todo lo que se refería al manejo de los números y de los razonamientos sutiles. Con el tiempo, ese compañero se transformó en un brillante matemático profesional con fama de infalible en todo lo relacionado con la difícil área de su especialidad. Con gran interés y no sin cierta envidia, Juan se mantuvo al corriente sobre los logros de su amigo y la fama que rodeó a su personalidad.
Un cierto día, Juan se encuentra casualmente con su compañero matemático que estaba saliendo de su domicilio, cerrando la puerta del mismo, y se produce entre ambos el siguiente diálogo:
<u>Juan</u> : ¡Qué alegría me da encontrarte!
<u>Matemático</u> : ¡Siento lo mismo al verte! Por favor, cuéntame qué ha sido de tu vida…
<u>J</u> : Por suerte soy muy feliz. Me he casado y tengo tres preciosas hijas.
<u>M</u> : ¡Tres hijas! ¿Y de qué edad?

J : El producto de sus edades es 36 y su suma coincide con el número de calle de tu vivienda
M : Pero con esa única información, no puedo determinar sus edades…
J : (feliz por haber puesto en apuros a su amigo) Al fin te pude agarrar en algo. Se lo contaré a mi hija mayor …

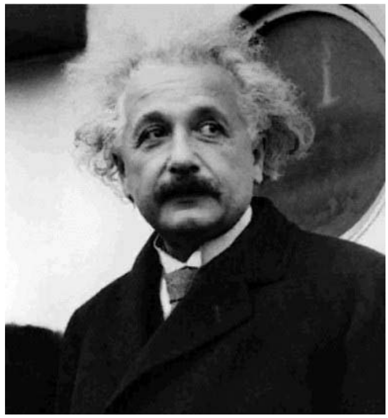
M : ¡Ah! Ahora sí, éstas son sus edades (y a continuación, ante el asombro de Juan, le dice correctamnte las tres edades)

Pregunta : Amigo lector, ¿podrías, como el matemático del cuento, encontrar las edades de las hijas de Juan y, de paso, el número de calle de la vivienda del matemático?

6.3 – El enigma de Einstein

Este problema se ha mencionado algunas veces como la "adivinanza" de Einstein pero la denominación de "adivinanza" no es correcta. Estando determinada la solución, no puede llamarse "adivinanza" En efecto, una adivinanza consiste en encontrar una solución a una situación que tiene múltiples posibilidades, pero que requiere hallar la correcta, con instinto y algo de razonamiento. Por ejemplo, una difícil: "adivina qué número de lotería saldrá con el premio mayor en el próximo sorteo"; una fácil: " dos muchachos caminan por el campo y en un lugar encuentran: una bufanda anudada, dos carbones y una zanahoria, entonces se sonrien; adivina en qué estaban pensando"; obviamente la respuesta es " en un muñeco de nieve"; no es la unica posibilidad, pero es lo que el autor quiere que se piense. Por tal motivo, preferimos plantear el problema como "enigma" y no como "adivinanza".

El enunciado del enigma es el siguiente:



Hay 5 casas de diferentes colores.
En cada una de ellas vive una persona de diferente nacionalidad.
Los 5 propietarios toman una bebida determinada, fuman una marca de tabaco determinada y tienen una mascota de compañía.
Ninguna de las 5 personas tiene la misma mascota, ni fuma la misma marca de tabaco ni bebe la misma bebida.

La pregunta es : ¿Cuál de los propietarios tiene al pez como mascota ?

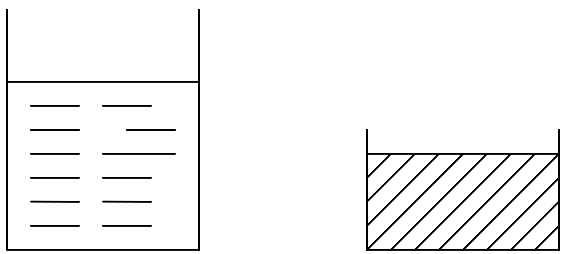
Las claves son las 15 siguientes:

1- El británico vive en la casa roja.
2- El suizo tiene un perro.
3- El danés bebe te.
4- La casa verde está situada a la izquierda de la blanca.
5- El propietario de la casa verde toma café.
6- La persona que fuma Pall Mall tiene un pájaro.
7- El propietario de la casa amarilla fuma Dunhill.
8- El que vive en la casa del centro toma leche.
9- El noruego vive en la primer casa.
10- La persona que fuma Blends vive al lado de aquél que tiene un gato
11- La persona que tiene un caballo vive al lado del que fuma Dunhill.
12- El que fuma Bluemaster toma cerveza.

13- El alemán fuma Prince.
14- El noruego vive al lado de la casa azul.
15- El que fuma Blends tiene un vecino que toma agua.

Einstein escribió este problema en el siglo pasado y dijo que el 98% de la población mundial no lo podría resolver.

6.4 – El líquido extraño



A V

Dos recipientes, de formas y volúmenes cualesquiera, contienen líquido: el recipiente A contiene agua y el V contiene vino. Se dispone de una cuchara y se realizan las siguientes operaciones:
1) La cuchara se introduce en A y se llena de agua.
2) El agua retirada de A se vierte en V y se mezcla: el recipiente V contiene ahora una mezcla de vino con un poco de agua
3) La misma cuchara se introduce en el recipiente V y se llena de la mezcla mencionada
4) El contenido de la cuchara (mezcla retirada) se vierte en el recipiente A y se mezcla.

Al cabo de esas operaciones, el recipiente A contiene agua y un poco de vino (el vino es "extraño" para A), el recipiente V contiene vino y un poco de agua (el agua es "extraña" para V).

La pregunta es: al cabo de las operaciones mencionadas, ¿cuál de los dos recipientes contiene mayor volumen de líquido "extraño"?

Soluciones

1) Los boletos de la suerte :

Sean A,B,C,D,E las posiciones de los números que aparecen en el boleto. El problema planteado es equivalente al siguiente: disponemos de 21 caramelos y A;B;C;D;E son 5 niños; vamos tomando un caramelo y se lo damos a uno de los niños, hasta agotar los 21 caramelos.
Si a,b,c,d,e son las cantidades de caramelos (o sea los dígitos correspondientes en el boleto) que habrán recibido al final los distintos niños, sabemos que:

$$a + b + c + d + e = 21$$

Además, tratándose de dígitos, tenemos las restricciones siguientes:
a,b,c,d,e son naturales que cumplen $0 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 9$, $0 \leq d \leq 9$, $0 \leq e \leq 9$.

Paso 1 :
En este paso, no tendremos en cuenta la restricción ≤ 9. En la primera entrega, elegimos por ejemplo al niño B, en la segunda E y así sucesivamente, hasta agotar los 21 caramelos; tendremos así por ejemplo el grupo:

BE………..B (21 elementos)

Otro ejemplo posible es : CB……….A
La cantidad de posibilidades para esta acción es obviamente (designamos con CR a las combinaciones con repetición):

$$CR_{21}^{5} = C_{21}^{25} = \underline{\mathbf{12650}} ,$$

habiendo aplicado la conocida fórmula para las combinaciones ordinarias. En cada una de esas combinaciones con repetición, tenemos:

a = cantidad de veces en que aparece el elemento A (o sea la cantidad de caramelos que recibió el niño A)
b = cantidad para B
c = cantidad para C
d = cantidad para D
e = cantidad para E

Los grupos mencionados forman combinaciones y no arreglos pues el orden en que aparecen los elementos no interesa ya que contamos los caramelos recibidos en total por cada niño. Si el niño N no recibe ningún caramelo, su número n será 0. Pero habrá por supuesto números mayores que 9 y por lo tanto las posibilidades calculadas incluyen casos que no corresponden a boletos.

<u>Paso 2</u> :

En la cantidad calculada de 12650 posibilidades, tenemos casos en que por lo menos algún a,b,c,d,e supera a 9. Debemos restar esos casos.
Supongamos por ejemplo que al niño A ya le dimos 10 caramelos en las 10 primeras acciones (ya vimos que el orden de las entregas no interesa); quedan 11 caramelos para repartir, o sea que el reparto siguiente debe hacerse en tal forma que
a + b + c + d + e = 11. Por la misma consideración que la realizada en el paso 1, tendremos las posibilidades:

$$CR_{11}^{5} = C_{11}^{15} = 1365$$

Repitiendo este cálculo para cada uno de los niños, la cantidad total de posibilidades a restar por este concepto será: 5x1365 = **<u>6825</u>** .

<u>Paso 3</u> :

En el cálculo que realizamos en el paso 2, hemos evaluado 2 veces los casos en que dos variables son simultáneamente 10 (no puede haber más de 2 variables que sean simultáneamente 10 ya que las cifras sumarían por lo menos 30, lo cual es absurdo ya que sólo tenemos 21 caramelos; tampoco puede haber 2 variables que sean simultáneamente 11). Debemos calcular esos casos y compensar sustrayéndolos de los 6825 casos calculados..
Suponiendo por ejemplo que las 2 variables sean a y b, si ya les dimos 10 caramelos a A y 10 a B, queda 1 solo caramelo para entregar, o sea que el reparto siguiente nos daría
a + b + c + d + e = 1, lo cual produce la cantidad de casos $CR_{1}^{5} = C_{1}^{5} = 5$. Como las dos variables se pueden elegir entre las 5 de C_{2}^{5} maneras, la cantidad total de casos "intrusos" será $5C_{2}^{5}$ = 50. De modo que los casos a quitar de los calculados en el paso 1 serán en realidad:

6825 – 50 = **<u>6775</u>**

<u>Cálculo final</u> :

La cantidad de boletos cuyos dígitos suman 21 es entonces:

12650 – 6775 = $\boxed{\mathbf{5875}}$

Como había en total 100000 boletos, la probabilidad de recibir un boleto de la suerte es:

$$5{,}875\% = \frac{47}{800} = 0{,}05875 \ .$$

<u>Observación sobre el paso 2</u> :
Otra forma de llegar al número 1365 obtenido en el paso 2 es la siguiente:

- Si hacemos a = 10 y lo dejamos fijo, repartimos los 11 caramelos restantes entre los otros 4 niños : b + c + d +e = 11, lo cual nos da CR_{11}^{4} casos
- Haciendo a = 11, obtenemos CR_{10}^{4} casos
- Haciendo a = 12, obtenemos CR_{9}^{4} casos
- Así sucesivamente, hasta a = 21, con CR_{0}^{4} casos

Debemos entonces restar esta cantidad de casos:

$$CR_{11}^{4} + CR_{10}^{4} + CR_{9}^{4} + ... + CR_{0}^{4} \ ,$$

o sea, en combinaciones comunes:

$$C_{11}^{14} + C_{10}^{13} + C_{9}^{12} + ... + C_{0}^{3}$$

Haciendo el cálculo de esa suma, obtenemos 1365, como en el razonamiento realizado en el paso 2, donde evaluamos C_{11}^{15} .

---

2) <u>Las tres hijas de Juan</u>

Hay 8 maneras de descomponer 36 en un producto de 3 factores. Indicamos esas descomposiciones, mostrando para cada descomposición cual es la suma de esos 3 factores:

Descomposición	1x1x36	1x2x18	1x3x12	1x4x9	1x6x6	2x2x9	2x3x6	3x3x4
Suma	38	21	16	14	13	13	11	10

El matemático conoce naturalmente el número de puerta de su casa. Al plantearse esas 8 descomposiciones posibles de 36, le basta realizar la suma de los 3 factores y observar

cual es la suma que coincide con su número de domicilio. Sin embargo, él manifestó que no podía determinar las edades; ¿por qué? Pues simplemente porque su casa lleva el número 13 y tiene allí dos posibilidades: 1,6,6 y 2,2,9. Pero cuando Juan le habló de su "hija mayor", comprendió que la única terna posible era 2,2,9.
La solución es pues: ¡¡una hija de 9 años y dos mellizas de 2 años!! El número de puerta es 13.

---

3) El enigma de Einstein

El problema que plantea Einstein consiste en colocar 25 elementos en una matriz de 5 x 5, de modo que todos los elementos de una misma columna sean siempre de igual naturaleza En esas condiciones, es fácil ver que la cantidad de matrices que se pueden formar es $(5!)^5$, o sea 24.883.200.000.
La originalidad del problema consiste en que con solamente 15 relaciones simples y una pregunta, se obtiene:
1.- Los nombres de los 25 elementos.
2.- Que toda la fabulosa cantidad de posibilidades se reduzcan a una sola.

El gran mérito del problema está en su planteo y no en encontrar la solución, pues para una mente formada en las matemáticas no resulta demasiado difícil
La solución es la siguiente: (numeramos las casas de izquierda a derecha)

Casa Nº	Nacionalidad	Color casa	Bebida	Mascota	Tabaco
1	Noruego	Amarillo	Agua	Gato	Dunhill
2	Danés	Azul	Té	Caballo	Blends
3	Británico	Rojo	Leche	Pájaro	Pall-Mall
4	Alemán	Verde	Café		Prince
5	Suizo	Blanco	Cerveza	Perro	Bluemaster

Por lo tanto el propietario cuya mascota es el pez es el **Alemán** .

---

4) <u>El líquido extraño</u>

Al realizar la operación (3), la cuchara queda llena con una mezcla de mucho vino y un poco de agua. Si llamamos **<u>c</u>** a la capacidad de la cuchara y **<u>a</u>** al volumen de agua que contiene la cuchara en su operación de retorno (operación 4), el recipiente A recibe el volumen de vino (c – a), que será la cantidad de líquido ”extraño” que contendrá A al finalizar los movimientos. Por otra parte, el recipiente V recibió el volumen **<u>c</u>** de agua en la operación (2), pero se le quitó el agua **<u>a</u>** en la operación (3), de modo que al finalizar los movimientos, V contendrá el volumen (c-a) de agua, que será el líquido “extraño” de V.
La conclusión es: al finalizar las operaciones, ambos recipientes contienen la misma cantidad de líquido “extraño”.

CAPÍTULO 7 – SUBIENDO UN ESCALÓN EN LA TEMÁTICA PROPUESTA

En este último capítulo, presentaremos algunos desarrollos de matemática más avanzada, por lo cual nos dirigimos a lectores con una formación matemática de mayor nivel. Si bien los enunciados son de fácil comprensión por referirse a conceptos casi elementales, las demostraciones exigen mayor esfuerzo y formación más profundizada por parte del lector (recordar el famoso " último teorema de Fermat", que durante siglos fue llamado "conjetura de Fermat", cuyo enunciado está al alcance de alguien sin ninguna formación especial en Matemáticas pero cuya demostración fue realizada recién en nuestros días por el Profesor Andrew WILES de la Universidad de Princeton: esa demostración fue oficialmente aceptada por la comunidad matemática en 1995; ver mi "Viajando por rincones matemáticos" en su primer itinerario).

7.1 – Teorema Fundamental del Álgebra

Este famoso teorema, que establece que **"todo polinomio de coeficientes complejos y variable compleja tiene por lo menos una raíz en el campo complejo"**, fue demostrado por primera vez por el gran GAUSS en 1799, que lo presentó en su tesis doctoral ante la Universidad de Heimstedt.

Todo lector con conocimientos matemáticos básicos conoce los resultados de estos dos teoremas:

Teorema 1 : (Teorema Fundamental del Álgebra)
Todo polinomio de coeficientes complejos y variable compleja tiene por lo menos una raíz.

Teorema 2 : Todo polinomio de grado efectivo n, con coeficientes complejos y variable compleja, tiene n raíces en el campo complejo (contadas con su orden de multiplicidad)

Este par de teoremas presenta a mi juicio una situación muy poco frecuente en Matemáticas y que siempre me resultó impactante; invito al lector a compartir conmigo esa curiosa situación lógica:

a) El teorema 1 establece una propiedad muy modesta (asegura la existencia de sólo una raíz), mientras que el teorema 2 tiene una conclusión mucho más generosa (asegura la existencia de n raíces). El teorema 1 no sería más que una consecuencia del 2 si éste estuviera demostrado. Sin embargo, la lógica del avance resultó ser la contraria: se demuestra en primer lugar el teorema 1, resultando luego, en forma casi inmediata, la prueba del teorema 2.
b) La demostración del teorema 1 es sumamente "difícil": el primero que logró

realizarla es Gauss en su tesis de 1799, como dijimos, mientras que la prueba del teorema 2 es de gran sencillez. El teorema "modesto" resulta pues ser un formidable avance, mientras que el teorema "generoso" es una simple consecuencia del anterior.

El lector seguramente compartirá conmigo que esa situación es sumamente inusual en la lógica de las matemáticas.

A propósito del Teorema Fundamental del Álgebra, existen hoy en día numerosas demostraciones del mismo, con herramientas de carácter topológico o algebraico, mucho más modernas que las nociones empleadas por GAUSS; pero ¡qué difícil resulta ser el primero en demostrar tan importante teorema!

Dispongo de una demostración que recibí directamente del gran matemático uruguayo José Luis MASSERA, en una de las exposiciones que tuve el privilegio de escuchar durante las brillantes clases de Análisis Matemático que él brindaba en la Facultad de Ingeniería de Montevideo. Tuve la suerte de ser uno de los alumnos de sus clases y nunca olvidé la claridad, la profundidad y el enorme conocimiento que el Profesor Massera exhibía durrante el ejercicio de su cátedra. Por tal motivo, presento aquí la demostración que nos transmitió Massera en aquellos lejanos años de mi juventud (he modificado algunas notaciones y algunos matices para facilitar la tarea del lector).

Demostración del Teorema Fundamental del Álgebra

Paso 1

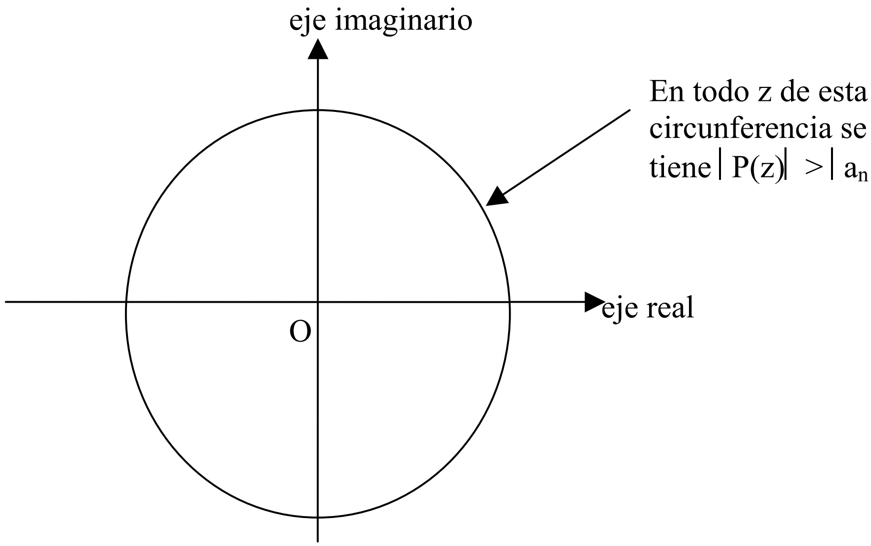
Sea un polinomio de coeficientes complejos y variable compleja, con grado efectivo n ($a_0 \neq 0$):

$$P(z) = a_0\, z^n + a_1\, z^{n-1} + a_2\, z^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + a_n$$

Si P(z) admite la raíz 0 ($a_n = 0$), el teorema estaría demostrado. Supondremos que no admite la raíz 0 ($a_n \neq 0$). Observamos que para $|z| \to +\infty$ es $P(z) \sim a_0\, z^n$, de modo que:

$$\lim_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty$$

Tomando entonces $|z|$ suficientemente grande, podemos lograr que $|P(z)|$ sea tan grande como queramos. Geométricamente, esto significa que podemos encontrar, en el plano complejo, una circunferencia centrada en el origen O y con radio tal que en todos sus puntos se tenga $|P(z)| > |a_n|$



PLANO COMPLEJO

Si consideramos el dominio compacto *C* (o sea cerrado y acotado) constituido por el círculo cerrado de la figura, tomamos en él un z cualquiera que escribimos en forma binómica como z = x + yi ; queda definida la siguiente función F: $R^2 \rightarrow R$ sobre ese compacto:

$$|P(z)| = |P(x+yi)| = F(x,y)$$

Esta función $F(x,y) = \left|\sum_{h=0}^{n} a_h (x+iy)^{n-h}\right|$ es continua porque resulta de realizar operaciones con funciones continuas que conservan la continuidad y entonces le podemos aplicar en el dominio *C* el teorema de Weierstrass que, como es conocido, establece que toda función continua en un compacto admite en el mismo un máximo absoluto y un mínimo absoluto. Nos interesa el mínimo.

Ese mínimo no puede producirse en un punto del borde de *C* ya que en él se tiene $F(x,y) = |P(z)| > |a_n|$ y en el origen $F(0,0) = |P(0)| = |a_n|$. El mínimo absoluto se producirá pues en el interior de *C*, por lo menos en un punto z_0 ; el mínimo valdrá $|P(z_0)|$. Si demostramos que ese mínimo vale 0, quedará probado que el polinomio admite por lo menos la raíz z_0 , ya que $|P(z_0)| = 0 \Rightarrow P(z_0) = 0$.

Paso 2

Hagamos el cambio de la variable independiente z por otra variable independiente w mediante.

$$z = z_0 + w$$

El polinomio dado quedará expresado como un nuevo polinomio en w, también de grado n:

$$P(z) = b_0\, w^n + b_1\, w^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_n\ ,$$

donde $w = z - z_0$. Obsérvese que $b_0 = a_0$, de modo que $b_0 \neq 0$. Para $z = z_0$, será $w = 0$, de donde $P(z_0) = b_n$.

Nuestro objetivo es demostrar que $P(z_0) = 0$, o sea ahora $b_n = 0$, recordando que $|P(z_0)|$ era el mínimo de $|P(z)|$ dentro del círculo *C*. Observemos que el radio del círculo podría tomarse tan grande como quisiéramos, de modo que lo supondremos también mayor que $|b_n|$ para que el complejo b_n pertenezca al interior de *C*.

Paso 3

Razonaremos por el absurdo, suponiendo que $b_n \neq 0$.

Consideremos el primer coeficiente no nulo que aparece antes de b_n (no todos son nulos pues por lo menos b_0 no lo es). Sólo para fijar ideas y para facilitar la escritura, asumiremos que se trata de b_{n-1} . Podemos escribir el polinomio en esta forma:

$$P(z) = b_n + b_{n-1}\, w + \varphi(w)\ ,$$

donde $\varphi(w) = b_{n-2}\, w^2 + b_{n-3}\, w^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_0\, w^n$.

Observemos que $b_{n-1}\, w$ tiene menor exponente en la potencia de w que cualquiera de los términos que contiene $\varphi(w)$. Podemos entonces escribir que, para $|w|$ suficientemente pequeño, se cumple: $\underline{|\varphi(w)| < |b_{n-1}w|}$ (D)

Para acercarnos del origen, tomaremos además el argumento de w de modo que $\arg(b_{n-1}\, w) = \arg(b_n) - \pi$, o sea $\arg(w) = \arg(b_n) - \arg(b_{n-1}) - \pi$. Resultará entonces, escribiendo en la forma polar los dos primeros términos de la última expresión de P(z), llamando θ al argumento de b_n :

$$P(z) = |b_n|\, e^{i\theta} + |b_{n-1}\, w|\, e^{i(\theta - \pi)} + \varphi(w)$$

Entonces:

$$|P(z)| = \left| |b_n| e^{i\theta} - |b_{n-1} w| e^{i\theta} + \varphi(w) \right|$$

o sea:

$$|P(z)| = \left| (|b_n| - |b_{n-1} w|) e^{i\theta} + \varphi(w) \right|$$

Aquí observamos que en el primer sumando, la expresión que figura entre paréntesis es positiva ya que $|b_{n-1}w|$ es un infinitésimo, que podemos hacer menor que $|b_n|$, de modo que se trata del módulo del complejo de argumento θ; considerando entonces el segundo miembro como el módulo de la suma de dos complejos, ese módulo será ≤ que la suma de los módulos de esos dos complejos, o sea:

$$|P(z)| \leq |b_n| - |b_{n-1}\, w| + |\varphi(w)|$$

Recordando que $|\varphi(w)| < |b_{n-1} w|$ (desigualdad D), resulta:

$$|P(z)| < |b_n| - |b_{n-1}\, w| + |b_{n-1}\,(w)| \quad \Rightarrow |P(z)| < |b_n| \,,$$

lo cual es absurdo ya que $|b_n|$ era el mínimo de $|P(z)|$ en el círculo.

7.2 – Teorema de Bertrand

El matemático francés Joseph BERTRAND (1882-1900) se interesó principalmente en las series enteras y en el Cálculo de Probabilidades. Bertrand enunció una proposición que establecía una interesante propiedad relacionada con la distribución de los números primos: entre cualquier natural y su doble siempre hay por lo menos un primo; con mayor precisión: **"Para todo n natural ≥ 1, hay algún primo p con n <p ≤2n"**, pero no logró demostrarla, razón por la cual la proposición se denominó inicialmente "conjetura de Bertrand". A pesar de la simplicidad de su enunciado (sucede muy a menudo en Matemáticas, sobre todo en Aritmética, que enunciados muy simples generan demostraciones que se resisten a los más grandes matemáticos, recordar el teorema de Fermat que , durante siglos, fue simplemente una conjetura). Bertrand no encontró la demostración, aunque sí verificó empíricamente la validez de su conjetura para n < 3 000 000, lo cual es muy meritorio si se tiene en cuenta que no existían en el siglo XIX los potentes recursos que hoy brindan las modernas computadoras. La conjetura se transformó en teorema en el año 1850, cuando el ruso CHEBYSHEV logró demostrar la propiedad por primera vez.

Más cerca de nuestros días, el matemático hindú RAMANUJAN y el matemático húngaro Paul ERDÖS encontraron demostraciones mucho más simples, aunque nada elementales. La demostración de Erdös, publicada en 1932, era efectivamente más simple pero de todos modos es sumamente compleja y emplea recursos muy potentes de otras ramas de la Matemática; el lector interesado puede hallar esa demostración en el excelente libro "Proofs from THE BOOK", citado en nuestra bibliografía.

A propósito de "THE BOOK" y de Paul Erdös, deseamos destacar que él fue uno de los más prolíficos matemáticos de nuestros tiempos, alguien que poseía una increíble potencia de pensamiento. Él sostenía los siguientes conceptos: "Existe un antiguo debate acerca de si creamos las matemáticas o simplemente las descubrimos. En otras palabras, ¿ya están las verdades en algún lado aunque no las conozcamos todavía? Si Vd. cree en Dios, la respuesta es obvia: las verdades matemáticas están en la mente del Supremo y Vd. simplemente las vuelve a descubrir. No estoy calificado para decir si Dios existe o no; sin embargo, siempre pensé que si existe, él posee su Libro transfinito que contiene las mejores demostraciones de todos los teoremas matemáticos, demostraciones que son elegantes y perfectas. Ése es EL LIBRO (THE BOOK)" El mayor cumplido que Erdös solía dirigir al trabajo de un colega era decir: " Viene directamente de THE BOOK".

Queremos señalar un aspecto interesante de la demostración de Erdös del teorema de Bertrand. Para llegar a la conclusión final sobre la validez de la propiedad para todo n, Erdös comienza por realizar la demostración para sólo los $n \leq 4000$, que es relativamente simple pero bien ingeniosa. Resulta muy interesante que para demostrar una propiedad que se refiere a los infinitos números naturales, Erdös haya basado su demostración en que la propiedad es cierta para los 4000 primeros naturales. Por tal motivo, hemos querido agregar aquí el argumento que encontró Erdös para $n \leq 4000$.

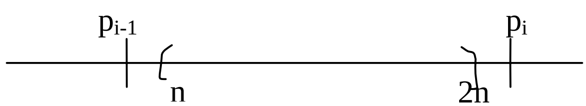
Demostración de la propiedad de Bertand para n≤ 4000

Sea el conjunto ordenado *C*, constituido por los siguientes 14 números primos, escritos en forma creciente:

2 3 5 7 13 23 43 83 163 317 631 1259 2503 4001

Llamaremos p_i a sus elementos, con i = 1, 2, 3, ………, 14. . A partir de i =2, estos primos han sido elegidos de modo que $p_i < 2p_{i-1}$ (cada elemento es menor que el doble de su anterior), como puede comprobarse: por ejemplo:43<2x23. Demostraremos que el intervalo semi-cerrado (n, 2n] con $n \leq 4000$ contiene por lo menos uno de los 14 primos de *C*.

Razonaremos por el absurdo, suponiendo que dentro del conjunto de los $n \leq 4000$, hay algún n tal que en el intervalo (n,2n] no hay ninguno de los 14 primos de *C*. Dado n, tomamos el número de *C* inmediatamente $\leq$ n. Por ejemplo, si n = 4000. tomamos el 2503; si n = 43, tomamos el 43. A ese elemento elegido en *C* lo llamaremos p_{i-1}. Por la suposición realizada (que queremos contradecir), el elemento p_i estará fuera del intervalo (n,2n], a la derecha de 2n::



(p_{i-1} puede eventualmente coincidir con n)
Tenemos:

$$p_{i-1} \leq n < 2n < p_i \;\Rightarrow\; 2p_{i-1} \leq 2n$$

Pero por la forma en que se definió el conjunto *C*, sabemos que $p_i < 2p_{i-1}$. Entonces resulta $p_i < 2n$, lo cual es una contradicción.

7.3 – <u>e^r es irracional</u>

Es un hecho muy conocido que el número e es irracional, basado en la serie

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Recordamos la demostración , que es bien simple: razonaremos por el absurdo, suponiendo e racional: $e = \dfrac{a}{b}$, siendo a, b enteros positivos. Tendríamos :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots\ldots\ldots\frac{1}{b!} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad ,$$

donde tomamos n ≥ b. Multiplicamos ambos miembros por n! :

$$n!e = n!(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+..........\frac{1}{n!})+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+..........................$$

El primer miembro es entero ya que $n!e = n!\frac{a}{b}$ y b es un divisor de n! pues n ≥ b ; también $n!(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+..........\frac{1}{n!})$ es obviamente entero. Se deduce que:

$$N = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+.................$$ es entero (positivo)

Pero $N < \frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+.............. = \frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}$ (serie geométrica de razón $\frac{1}{n+1}$) . Siendo N entero, la desigualdad $N < \frac{1}{n}$. es absurda..

Pero un resultado mucho más fuerte es que **e^r es irracional para todo r racional ≠ 0** . De esa conclusión, se deduciría naturalmente que el número e es irracional (caso r = 1)

<u>Demostración de la irracionalidad de e^r</u>
La demostración que presentaremos es esencialmente debida a Charles HERMITE (1873).

<u>Lema</u>: Sea n entero fijo ≥ 1. Consideramos la función de R en R:

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$$

a) La función f(x) es obviamente un polinomio de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i \qquad .$$

donde los c_i son enteros.

b) Para $0<x<1$, tenemos $0<f(x)<\frac{1}{n!}$. En efecto, para esos x , tenemos $f(x) > 0$ y además los dos factores del numerador de f(x) son < 1, de modo que $f(x) < \frac{1}{n!}$

c) **f(0) y f(1) son enteros [f(0) = 0, f(1) =0 y además toda derivada $f^{(k)}(x)$ con k≥0 cumple también: $f^{(k)}(0)$ y $f^{(k)}(1)$ son enteros.**

Demostremos esto último:

c_1) Por (a), mientras sea $1 \leq k \leq n-1$, dado que 0 es una raíz de orden n de f(x), anula hasta la derivada de orden (n-1) (ya que 2n es el grado del polinomio) ⇒ $f^{(k)}(0) = 0$. Si $n\leq k \leq 2n$, la derivada del polinomio contiene sumandos que son monomios en x; es fácil ver que al derivarlos y evaluarlos en 0, queda $f^{(k)}(0) = \frac{c_k .k!}{n!}$, que es entero porque c_k lo es y k! es simplificable por n! .Si k>2n, la derivada $f^{(k)}(x)$ es idénticamente nula.

Por lo tanto, todas las derivadas sucesivas de f(x) son números enteros al evaluarlas en x = 0.

c_2) $f(x) = f(1-x) \Rightarrow f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(1-x) \Rightarrow f^{(k)}(1) = (-1)^k f^{(k)}(0) \Rightarrow$todas las derivadas sucesivas tienen también valores enteros en x = 1.

Irracionalidad de e^r, con r racional ≠ 0 .

1) Caso r = p entero > 1 (si fuera p = 1, ya sabemos que e es irracional)

Razonaremos por el absurdo. Supongamos $e^r = \frac{a}{b}$ para enteros a, b positivos.

Elegimos n entero suficientemente grande para que $n! > ap^{2n}$ (esto es posible por ser el infinito factorial de mayor orden que el infinito exponencial, siendo p>1).

Siendo f(x) la función definida en el lema, consideramos la siguiente función:

$$F(x) = p^{2n} f(x) – p^{2n-1} f'(x) + p^{2n-2} f''(x) + ... – p f^{(2n-1)}(x) + f^{(2n)} (x)$$

Derivando:

$$F'(x) = p^{2n} f'(x) – p^{2n-1} f''(x) + p^{2n-2} f'''(x) + ... – p f^{(2n)}(x) + f^{(2n+1)} (x)$$

Siendo el último sumando idénticamente nulo(f(x) era de grado 2n), nos queda:

$$F'(x) = p [p^{2n-1} f'(x) – p^{2n-2} f''(x) + p^{2n-2} f'''(x) + ... – f^{(2n)}(x)]$$

De las expresiones de F(x) y F´(x), deducimos:

$$F(x) – p^{2n}f(x) = -\frac{F'(x)}{p} \Rightarrow F'(x) = -pF(x) + p^{2n+1}f(x)$$

Derivando e^{px} F(x) , obtenemos entonces:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{px}F(x)\right] = pe^{px}F(x) + e^{px}\left[-pF(x) + p^{2n+1}f(x)\right] = p^{2n+1}e^{px}f(x)$$

Por lo tanto:

$$\int_0^1 p^{2n+1}e^{px}f(x)dx = \left[e^{px}F(x)\right]_0^1 = e^pF(1) - F(0) = \frac{aF(1) - bF(0)}{b}$$

De acuerdo a la expresión que define a F(x), la parte (c) del lema nos muestra que F(0) y F(1) son enteros; por lo tanto:

$$N = b\int_0^1 p^{2n+1}e^{px}f(x)dx \quad \text{es un número entero}$$

Por otra parte, por el inciso (b) del lema, sabemos que para $0<x<1$ se cumple $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$, de modo que:

$$0 < N < \int_0^1 p^{2n+1}e^{px}\frac{1}{n!}dx = bp^{2n}\frac{1}{n!}(e^p - 1) < bp^{2n}\frac{1}{n!}e^p = \frac{ap^{2n}}{n!} < 1 \ ,$$

por la forma en que habíamos elegido n. El entero N positivo resulta entonces < 1, lo cual es absurdo. Entonces e^p no puede ser racional.

2) Caso $r = \frac{p}{q}$, con p,q enteros no nulos

Si fuera $e^{\frac{p}{q}}$ racional, $(e^{\frac{p}{q}})^q = e^p$ sería también racional:

- Si p>0, eso resultaría absurdo en virtud de la prueba (1).
- Si p<0, sería $e^p = \frac{1}{e^{-p}} \Rightarrow e^{-p}$ racional , con (-p) > 0 , también absurdo por (1)

Nuestra demostración resulta entonces completa para todo r racional ≠ 0.

<u>Consecuencia</u> : EL LOGARITMO DE CUALQUIER RACIONAL ≠ 1 ES IRRACIONAL

En efecto, sea $\alpha \in Q$, con $\alpha \neq 1$. Si $L\alpha$ fuera racional, el teorema anterior nos daría que $e^{L\alpha} = \alpha$ sería irracional, lo cual contradice la hipótesis.

7.4 – Distintos promedios entre números reales positivos

Sean n números reales positivos: $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$, con $n \geq 2$. Se definen entre ellos distintos tipos de promedios:

Promedio aritmético: $m_a = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n}$

Promedio geométrico: $m_g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots\ldots a_n}$

Promedio armónico: Es el inverso del promedio aritmético de los inversos de los números dados, o sea:

$$m_h = \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots\ldots\ldots + \dfrac{1}{a_n}}$$

Demostraremos que entre esos promedios se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\boxed{m_h \leq m_g \leq m_a}$$

donde los dos signos de = se cumplen si y sólo si los números a_i son todos iguales entre sí (los tres promedios son iguales a ese valor común de los n números).

1) $m_g \leq m_a$

Primera demostración (como problema de extremos ligados)

Sea $S = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n$. Nos proponemos examinar cuándo es máximo el producto $a_1 a_2 \ldots\ldots a_n$ manteniendo S constante. Usaremos el método de Lagrange, formando la función auxiliar:

$$\phi = a_1 a_2 \ldots\ldots a_n + \lambda (a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n - S),$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange. Anulamos las derivadas:

$$\left.\begin{array}{l} a_2 a_3 \ldots\ldots a_n + \lambda = 0 \\ a_1 a_3 \ldots\ldots a_n + \lambda = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 a_2 \ldots\ldots a_{n-1} + \lambda = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda a_1 = \lambda a_2 = \ldots\ldots \lambda a_n \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots\ldots = a_n$$

El producto resulta máximo cuando todos los a_i son iguales; ese producto máximo es entonces $\left(\dfrac{S}{n}\right)^n$. Tenemos entonces:

$$a_1\, a_2 \ldots\ldots\, a_n \leq \left(\frac{S}{n}\right)^n \Rightarrow$$

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots\ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n} \Rightarrow m_g \leq m_a$$

La igualdad obviamente se cumple cuando todos los a_i son iguales.

<u>Segunda demostración</u> (atribuida a Cauchy)
Procederemos por inducción completa, llamando P_n a la propiedad que queremos demostrar. Estableceremos la inducción en la forma siguiente, que claramente demuestra la propiedad para todo n:

A) P_2 es válida

B) $P_n \Rightarrow P_{2n}$

C) $P_n \Rightarrow P_{n-1}$

Paso A: $\sqrt{a_1 a_2} \leq \dfrac{a_1 + a_2}{2} \Leftrightarrow a_1 a_2 \leq \dfrac{(a_1 + a_2)^2}{4} \Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2 \geq 0$, lo cual es cierto

Paso B: $\prod_{k=1}^{2n} a_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=n+1}^{2n} a_k\right)$. Aplicando la hipótesis P_n , podemos escribir:

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \leq \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}\right)^n \qquad \left(\prod_{k=n+1}^{2n} a_k\right) \leq \left(\frac{\sum_{k=n+1}^{2n} a_k}{n}\right)^n$$

Resulta entonces:

$$\prod_{k=1}^{2n} a_k \leq \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}\right)^n \left(\frac{\sum_{k=n+1}^{2n} a_k}{n}\right)^n = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} \frac{\sum_{k=n+1}^{2n} a_k}{n}\right)^n$$

Aplicamos la propiedad P_2 ya demostrada a los dos números que figuran como factores bajo el paréntesis de la derecha: su producto es ≤ que el cuadrado de su promedio aritmético; nos queda entonces:

$$\prod_{k=1}^{2n} a_k \le \left[\left(\frac{\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_n}{n} + \dfrac{\sum\limits_{k=n+1}^{2n} a_k}{n}}{2}\right)^2\right]^n = \left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{2n} a_k}{2n}\right)^{2n},$$

o sea que se deduce P_{2n}

Paso C: Sean los (n-1) números a_1 , a_2 , ………, a_{n-1} . Llamemos A a su promedio aritmético, o sea: $A = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k}{n-1}$, cumpliéndose $(n-1)A = \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k$.

Consideremos los n números a_1 , a_2 , ………, a_{n-1} , A. Les aplicamos la propiedad P_n , que es válida por hipótesis:

$$a_1\, a_2 \,\ldots\ldots\, a_{n-1}\, A \le \left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k + A}{n}\right)^n = \left(\frac{(n-1)A + A}{n}\right)^n = A^n ,$$

de donde: $\prod\limits_{k=1}^{n-1} a_k \le A^{n-1}$, o sea $\prod\limits_{k=1}^{n-1} a_k \le \left(\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k}{n-1}\right)^{n-1}$.

La última desigualdad es la propiedad P_{n-1} , que queda entonces probada.

2) $m_h \le m_g$

Consideramos los números $\dfrac{1}{a_1}, \dfrac{1}{a_2}, \ldots, \dfrac{1}{a_n}$ y les aplicamos la propiedad $m_g \le m_a$, ya demostrada:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\cdots\cdots\cdots\frac{1}{a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots\cdots\frac{1}{a_n}}{n} \quad , \qquad \text{de donde:}$$

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots\cdots\frac{1}{a_n}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\cdots\cdots\cdots\frac{1}{a_n}}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots\cdots\cdots a_n} \quad ,$$

o sea: $m_h \leq m_g$,

con lo cual se completa la demostración.

7.5 – Una propiedad de los polinomios con coeficientes reales y raíces todas reales

Si las raíces del polinomio son todas reales y el primer coeficiente del polinomio es real, obviamente todos los coeficientes del polinomio son reales (recordar la descomposición factorial). Trabajaremos con polinomios de coeficientes todos reales y con todas sus raíces reales.
Se sabe que si un polinomio P(x) con coeficientes reales admite una raíz real múltiple α, entonces α es también raíz de P´(x). Vamos a ver ahora una especie de recíproco válido para polinomios con coeficientes reales y raíces todas reales (en realidad, el estricto recíproco sería: si α es raíz de P´(x), entonces es raíz múltiple de P(x), lo cual es falso ya que α no tiene ni siquiera por qué ser raíz de P(x)). El teorema válido es éste:

Teorema : Dado un polinomio P(x) con coeficientes reales y raíces todas reales, toda raíz múltiple de P´(x) es raíz de P(x).

Demostración :
Sea P(x) el polinomio, de grado n, con coeficientes reales y raíces todas reales: x_1, x_2 , ……, x_r , de órdenes de multiplicidad s_1 , s_2 , ..., s_r respectivamente. Sabemos que $\sum_{j=1}^{r} s_j = n$. Sabemos también que si $s_j = 1$, x_j no es raíz de P´(x); cuando $s_j \geq 2$, x_j es raíz de P´(x), de orden $s_j - 1$.
La cantidad de raíces de P´(x) coincidentes con raíces de P(x) (contadas con su orden de multiplicidad) es entonces $\sum_{j=1}^{r}(s_j - 1) = \sum_{j=1}^{r} s_j - \sum_{j=1}^{r} 1 = n - r$

Supongamos ahora que las raíces de P(x) mencionadas está escritas en orden creciente. Por el teorema de Rolle, siendo $P(x_1) = P(x_2)$ (ambos valores son 0), sabemos que entre x_1 y x_2 hay por lo menos una raíz de P´(x); lo mismo entre x_2 y x_3 , ….., entre x_{r-1} y x_r Generamos así otras (r-1) raíces de P´(x), por lo mnos. Si las contamos además con su orden de multiplicidad, la cantidad de esas raíces será, con más razón: $p \geq r - 1$ (1) .
En total, para los dos grupos de raíces de P´(x) consideradas (las coincidentes con las de P(x) y las generadas por el teorema de Rolle), tenemos (n – r + p) raíces.
Pero sabemos que la cantidad de raíces de P´(x), contadas con su orden de multiplicidad, es el grado de P´(x), o sea (n – 1); entonces:

$$n - r + p \leq n - 1 \;\Rightarrow\; p \leq r - 1 \qquad (2)$$

Cotejando (1) y (2), vemos que $p = r - 1$. Entonces todas las raíces generadas por la aplicación del teorema de Rolle son simples. Tenemos pues:

$$\text{raíces de P´(x), de grado n-1} \begin{cases} n-r \quad \textit{raíces que también lo son de } P(x) \\ r-1 \quad \textit{raíces simples} \end{cases}$$

Total: (n – r) + (r – 1) = n – 1, de modo que son <u>todas</u> las raíces de P´(x). Por lo tanto toda raíz múltiple de P´(x) está en el primer grupo y es entonces raíz de P(x). El teorema queda demostrado.

7.6 – <u>Evaluación de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$</u>

Es sabido que esta serie es convergente (armónica generalizada con exponente > 1). Nos proponemos calcular su suma, para lo cual emplearemos dos métodos: el primero, muy simple, aplicando las series de Fourier; el segundo, debido a Tom APOSTOL es más trabajoso y exige muchos cálculos, pero lo incluimos porque a nuestro juicio la idea que incluye es bien interesante y constituye un ejemplo notable del Cálculo Integral

<u>Primer método</u> :
Consideramos la función periódica de período 2π definida como $f(x) = x^2$ para
$-\pi \leq x \leq \pi$; su desarrollo de Fourier nos da:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - ....\right)$$

Evaluando en x = π, obtenemos:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(-\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - ....\right) \quad ,$$

de donde: $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) \quad \Rightarrow$$

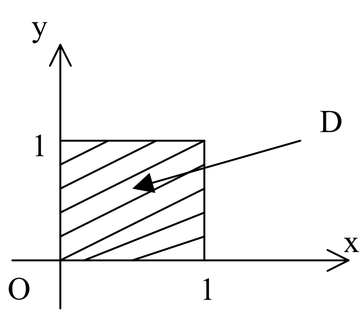
$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Siendo π^2 un número irracional, la suma de nuestra serie resulta también irracinal

Segundo método :

El método consiste en evaluar de dos maneras distintas la integral doble

I $= \iint_D \frac{1}{1-xy} dxdy$, siendo D el cuadrado de la figura:



a) Observemos que la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (xy)^n$ es geométrica de razón xy tal que $|xy| < 1$, de modo

que es convergente y su suma es $\frac{1}{1-xy}$. Podemos entonces escribir la integral I en la forma siguiente:

$$\mathrm{I} = \iint_D \sum_{n=0}^{+\infty} (xy)^n\,dxdy = \sum_{n=0}^{+\infty} \iint_D (xy)^n\,dxdy = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^n dx \int_0^1 y^n dy =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \left[\frac{y^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow \qquad \underline{I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}}$$

b) Calculamos ahora I de otra manera. Hacemos el siguiente cambio de variables (rotación de centro O y ángulo 45º en sentido horario):

$$\begin{cases} x = \dfrac{u-v}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{u+v}{\sqrt{2}} \end{cases} : \quad , \quad \text{o sea} \qquad \begin{cases} u = \dfrac{y+x}{\sqrt{2}} \\ v = \dfrac{y-x}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

La imagen D_{uv} del cuadrado D en el plano uv es el cuadrado cuyos vértices son las imágenes de los vértices de D:

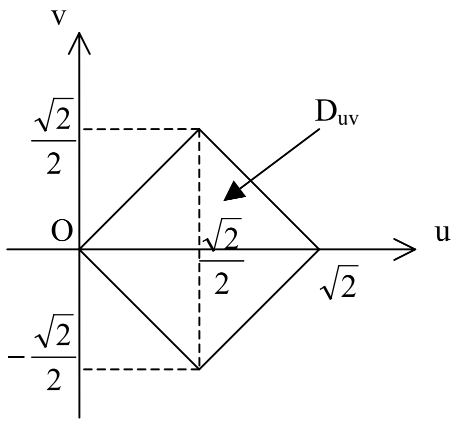
$$(0,0) \to (0,0)$$

$$(1,0) \to (\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2)})$$

$$(1,1) \to (\sqrt{2},0)$$

$$(0,1) \to (\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2)})$$

Representamos el cuadrado imagen:



Además, el jacobiano es obviamente 1: $J = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 1$

La nueva expresión de I es entonces, en el dominio de integración D_{uv} :

$$I = \iint_{D_{uvv}} \frac{1}{1-\frac{u^2-v^2}{2}} dudv = 2\iint_{D_{uv}} \frac{1}{2-u^2+v^2} dudv =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} du \int_{-u}^{u} \frac{1}{2-u^2+v^2} dv + 2\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} du \int_{u-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}-u} \frac{1}{2-u^2+v^2} dv$$

Usando $\int \frac{dv}{a^2+v^2} = \frac{1}{a} Arctg \frac{v}{a} + C$, resulta:

$$I = 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} du.\frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \left[Arctg \frac{v}{\sqrt{2-u^2}} \right]_{-u}^{u} + 2\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} du \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \left[Arctg \frac{v}{\sqrt{2-u^2}} \right]_{u-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}-u} =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} Arctg \frac{u}{\sqrt{2-u^2}} du + 4\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} Arctg \frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}} du$$

Llamando I_1 e I_2 a los dos sumandos que componen a I, los calcularemos separadamente:

Para I_1, hacemos el cambio de variable u = $\sqrt{2}sent$:

$$I_1 = 4\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\sqrt{2}\cos t} (Arctg \frac{\sqrt{2}sent}{\sqrt{2}\cos t}) \sqrt{2}\cos t dt = 4\int_0^{\pi/6} t dt = \frac{\pi^2}{18}$$

Para I_2, hacemos el cambio de variable u = $\sqrt{2}\cos(2t)dt$:

$$I_2 = 4\int_{\pi/6}^{0} \frac{1}{\sqrt{2}sen2t} (Arctg \frac{\sqrt{2(1-\cos 2t)}}{\sqrt{2}sen2t})(-\sqrt{2}.2sen2t)dt = 8\int_0^{\pi/6} Arctg \frac{1-\cos 2t}{sen2t} dt$$

Pero $\frac{1-\cos 2t}{sen2t} = \frac{2sen^2 t}{2sent\cos t} = tgt \quad \Rightarrow \quad I_2 = 8\int_0^{\pi/6} tgtdt = \frac{\pi^2}{9}$

Entonces $I = \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi^2}{9} \quad \Rightarrow \quad \underline{I = \frac{\pi^2}{6}}$

Comparando los dos resultados obtenidos para I, resulta:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

<u>Comentarios que relacionan estos resultados con la función zeta de Riemann</u>

La función zeta de Riemann se define como: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$, siendo s un real > 1.

Para s=1, la serie es divergente (armónica), pero para s>1 es convergente, como es sabido. Esta función admite una prolongación en el plano complejo, con un único polo en s = 1 ; se puede construir utilizando desarrollos en series de potencias. La función compleja resultante es de suma importancia en la teoría de los números primos.

Si s es real entero > 1 :

- cuando s es par, se demuestra que $\xi(s)$ es un múltiplo racional de π^2 y por lo tanto es irracional ; en las páginas anteriores, hemos hallado directamente el múltiplo (1/6) de π^2 ;
- cuando s es impar, no se sabe si $\xi(s)$ es racional o irracional ; sólo se sabe que $\xi(3)$ es irracional (demostrado por Roger APÉRY recién en 1979), pero no se sabe qué sucede para los impares mayores que 3.

7.7 – Invitación a la Aritmética Transfinita

Contar la cantidad de elementos en un conjunto infinito parece a simple vista una idea descabellada. Sin embargo, aún aquéllos no familiarizados con las ideas matamáticas tienen un vago sentimiento de que hay distintos "tamaños" de infinitos : cuando piensan en el infinito asociado a la sucesión natural de números, sienten que no es el mismo infinito que el asociado a los puntos de una recta.
El primer matemático que encararía a fondo los temas relacionados con el infinito fue Georg Ferdinand Ludwig Philip CANTOR (1845-1918).
Cantor nació en Rusia en 1845 y falleció en un asilo de alienados en 1918. Su familia se trasladó a Alemania cuando él tenía 12 años. El joven Cantor era un dibujante muy talentoso y su familia era de gran afición musical, con varios parientes tocando en importantes orquestas sinfónicas. Cantor tenía obviamente una naturaleza "artística", heredada de su familia, pero sobresalió en Matemáticas, completando en 1867 su doctorado en la Universidad de Berlín.
Los predecesores de Cantor objetaron el "infinito completo", o sea el considerar el proceso de infinitud comoestando siempre acabado. El propio GAUSS opinaba que "el infinito es sólo una manera de hablar". Pero Cantor no estaba de acuerdo: para él, el infinito era un concepto matemático sólido y respetable y merecía el más profundo examen intelectual. Las ideas de Cantor provocaron tal sacudida en el mundo matemático, que no se recuerda un ambiente más tormentoso en la historia de las Matemáticas que el creado por esas ideas. Esto muestra que aún en un campo tan abstracto como el de las Matemáticas, las emociones humanas no pueden ser eliminadas.
Cantor publicó su trabajo en 1874 y sus resultados provocaron la admiración o el escepticismo de sus colegas contemporáneos, o simplemente los matemáticos más conservadores miraron la comparación de infinitos efectuada por Cantor como una eclosión de romanticismo por parte de un joven profesor. Y, sin embargo, ¡qué asombroso mundo fue el creado por Cantor!

En este libro, pretendemos realizar una presentación elemental de los conceptos de aritmética "transfinita" establecidos por Cantor. Nos ocuparemos de los números transfinitos "cardinales", o sea que nuesto objetivo será considerar los conjuntos infinitos del punto de vista de su "tamaño"; pero aún así, el lector comprobará que usamos la relación de desigualdad entre dos cardinales tranfinitos sólo de una manera intuitiva, sin realmente definir con precisión dicho concepto. Cantor introdujo también los transfinitos "ordinales", la teoría de los conjuntos "bien-ordenados" y su famosa creación de los llamados "Alefs de Cantor". Pero estos conceptos escapan del objetivo de este libro y sugerimos al lector interesado de dirigirse a los libros especializados; sólo presentamos los conceptos más básicos de su teoría, con el deseo de hacer simplemente una "invitación" a penetrar en un mundo matemático tan especial. El gran David HILBERT pronunció en un Congreso de Matemáticos de Zurich en 1897 su famosa frase: " Del paraíso que Cantor creó para nosotros, nadie podrá desalojarnos"

7.7.1 – Generalidades sobre conjuntos y sobre números cardinales

Para facilitar la comprensión de nuestra breve íntroducción a la Aritmética Transfinita, haremos un rápido repaso acerca de conjuntos y relaciones, revisando en particular el concepto de "coordinación" o "correspondencia biunívoca" entre conjuntos.
Como se sabe, la Matemática asigna a la noción de **"conjunto"** un carácter de concepto inicial o primitivo, designándose por **"elemento"** a cada objeto, unidad o individuo que forma parte del conjunto. Designaremos a los conjuntos con letras mayúsculas A, B, C, …. y a sus elementos con minúsculas.
Recordemos la definición de "producto cartesiano" de un conjunto A por un conjuntoB:

$$A\,x\,B = \{(a,b)\,/\,a \in A, b \in B\}$$

Cuando $(a,b) \in R$, diremos que "a está en la relación R respecto a b" y se indica $a R b$. Siendo R una relación binaria entre elementos de A y B, o sea un conjunto de cuplas o pares ordenados, tendremos $R \subseteq AxB$. Si los conjuntos A y B son iguales, entonces R es una relación entre los elementos del conjunto en A, o simplemente R es una relación en A.
Si R es una relación binaria en A, diremos que es de equivalencia si y sólo si es reflexiva, simétrica y transitiva:

Reflexiva: $a \in A \Rightarrow a R a$

Simétrica: $a R b \Rightarrow b R a$

Transitiva: $[a R b \wedge b R c] \Rightarrow a R c$

Relaciones funcionales o aplicaciones :

El término "función" es sinónimo de: aplicación, transformación, proyección, cprrespondencia.
Una función es un caso particular de relación binaria entre dos conjuntos A y B y está determinada por una regla que asigna a cada elemento de A un único elemento de B.
Vemos que el recíproco no es cierto, o sea que una relación binaria no es obligatoriamente una función: en efecto, si en la relación existen 2 pares ordenados (a,b) y (a,b´), o sea dos pares ordenados que tienen el mismo primer elemento, no se tratará de una relación funcional. Si f es la función, diremos afb o bien b = f(a)
Son bien conocidos los conceptos de función "suryectiva" :

$$\forall y \in B : \exists x \in A \,/\, (x,y) \in f$$

y de función "inyectiva" :

$$\forall x \in A \,,\, \forall y \in B : f(a) = f(b) \;\Rightarrow\; a=b$$

Con estos conceptos, se llega a la aplicación "biyectiva" si y sólo si es inyectiva y suryectiva. Se dice también que queda establecida una correspondencia biunívoca entre A y B y se escribe $A \,\overline{\wedge}\, B$; también se dice que A es "coordinable" con B. En este caso, la relación inversa f^{-1} es una función biyectiva de B sobre A y tenemos también $B\overline{\wedge}A$: B es "coordinable" con A.
Si consideramos un conjunto C constituido por conjuntos A, B, ... : C = $\{A, B, ...\}$ y definimos en C una relación binaria R tal que $A \,R\, B \Leftrightarrow A\overline{\wedge}B$, es fácil ver que esta relación es una relavión de equivalencia:

$$A \in C \;\Rightarrow A \,\overline{\wedge}\, A$$

$$A \,\overline{\wedge}\, B \;\Rightarrow\; B \,\overline{\wedge}\, A$$

$$(A \,\overline{\wedge}\, B, B \,\overline{\wedge}\, C) \;\Rightarrow\; A \,\overline{\wedge}\, C$$

Definición de número cardinal :
Frege da la siguiente definición de número cardinal: "Dado un conjunto K, se llama número cardinal de K a la clase de todos los conjuntos coordinables con K". Se indica con la notación N_c (K). Por ejemplo, el número cardinal de un trío es lo que este trío tiene de común con todos los conjuntos coordinables con él, haciendo abstracción de las particularidades de cada uno de ellos (espacio, situación, etc,) y también del orden de sus elementos; si K es el trío dado, se tiene $N_c(K) = 3$. Con esta definición de número cardinal, se puede establecer la teoría de los números naturales, definiendo la igualdad y las operaciones.

El otro método para definir los números naturales se basa en los “números inductivoc” de Russell, que satisfacen los célebres axiomas de Peano; esta teoría sólo permite definir los cardinales finitos pues emplea esencialmente la propiedad $a + 1 \neq a$..
Si llamamos “sección” o “intervalo natural inicial” al conjunto de los n primeros números naturales $I_n = \{1,2,3,\ldots\ldots,n\}$, diremos que un conjunto es <u>finito</u> si y sólo si es vacío o bien es coordinable con algún I_n :

$$X \text{ es finito } \Leftrightarrow X=\Phi \vee \exists n\in N / X \mathrel{\overline{\wedge}} I_n$$

Definimos entonces conjunto <u>infinito</u> de este modo: “Un conjunto es infinito si y sólo si no es finito”
De estas definiciones surgen las siguientes proposiciones, fácilmente demostrables
1) Todo sub-conjunto de un conjunto finito es finito
2) Un conjunto es infinito sii admite un sub-conjunto coordinable con N
3) Un conjunto es infinito sii es coordinable con alguna parte estricta de sí mismo:

$$X \text{ es infinito } \Leftrightarrow \exists X' \subset X / X \mathrel{\overline{\wedge}} X'$$

Observemos que esta última proposición fue la que adoptó Dedekind como <u>definición</u> de conjunto infinito. Una consecuencia inmediata de esta proposición es que un conjunto es finito sii no es coordinable con ninguna parte estricta de sí mismo.

Con esta distinción entre conjuntos finitos y conjuntos infinitos y adoptando la definición de Frege para el cardinal de un conjunto K, resultará simplemente que $N_c(K)$ es un natural cuando K es finito y en cambio es un “transfinito” cuando K es infinito.

7.7.2 – <u>Números cardinales transfinitos</u>

Para introducir los cardinales transfinitos, debemos verificar que existen conjuntos “infinitos”; el ejemplo más simple es el conjunto de los números naturales. Éste es infinito, de acuerdo a nuestra definición , ya que es coordinable con el conjunto de los cuadrados, que es una de sus partes estrictas:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ | & | & | & | & | & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

El conjunto de los naturales tiene entonces un cardinal transfinito, que es precisamente el “menor” (este concepto se establece con precisión al deasarrollar el estudio de las desigualdades entre transfinitos) de los números transfinitos y lo designaremos como **a** (en su teoría de los números alefs, Cantor lo designa como $\aleph_0$, o sea "alef cero"). Se dice también que el conjunto de los números naturales tiene "**potencia**" a. Todos los conjuntos que tienen potencia a se llaman numerables, es decir que son numerables los conjuntos que pueden ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números naturales.

Ejemplos :

1) Es numerable el conjunto de todos los números pares ya que se puede hacer corresponder a todo número 2n el número n.
2) En general es numerable cualquier sucesión $\{a_n\}$, ya que a_n se hace corresponder con n.
3) Es numerable el conjunto de todos los racionales positivos pues se puede escribir como sucesión en la forma siguiente:

$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{4}{1} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{5}{1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

, donde el criterio de ordenación es el siguiente:

> "Se colocan primeramenre aquellos números racionales en los que la suma de numerador y denominador es 2, luego aquéllos en que esa suma es 3, luego aquéllos en que es 4, luego 5, luego 6, etc.; dos números de igual suma se ordenan de menor a mayor . Se suprimen las fracciones en que el numerador y el denominador no son primos entre sí"

Resulta así una sucesión que contiene a todos los racionales positivos, sin repetirlos.

4) El conjunto de los números enteros es numerable pues se puede escribir como sucesión en la forma siguiente:

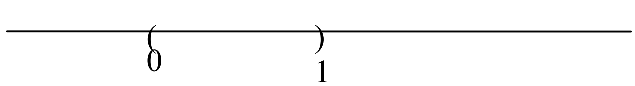
$$0 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \quad 2 \quad -3 \quad 3 \quad -4 \quad 4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

cuya regla de ordenación es obvia.

5) Con la misma regla que para los enteros, resulta que el conjunto de todos los números racionales es numerable.

Todas estas experiencias parecían mostrar que todo conjunto infinito es numerable. El ejemplo más notable es el de los racionales que, como es sabido, es un conjunto denso. Pero en su trabajo de 1847, Cantor demostró que existen conjuntos infinitos de potencia mayor que a, lo cual puede probarse a partir del siguiente

Teorema : El conjunto de los puntos de un segmento no es numerable.



Vamos a considerar los puntos del segmento (0,1), donde excluimos los extremos. Conocemos la equivalencia entre “punto” y “número real”, de modo que vamos a considerar el conjunto de los números reales del intervalo (0,1).
Razonaremos por el absurdo. Supongamos que el conjunto sea numerable; disponemos entonces sus elementos en sucesión, expresándolos en su forma decimal:

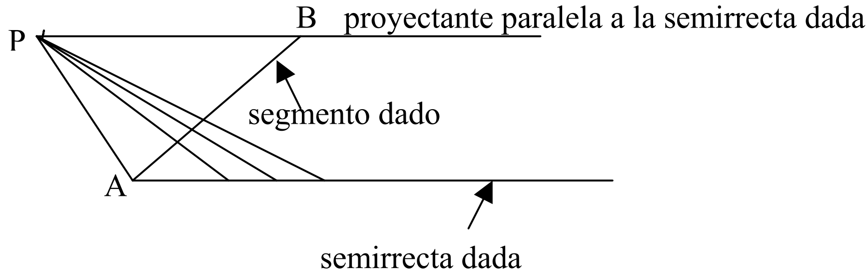
N_1	$0, a_1\ a_2\ a_3$ …………….	1^{er} número
N_2	$0, b_1\ b_2\ b_3$	2^{o} número
N_3	$0, c_1\ c_2\ c_3$	3^{er} número
$\vert$	$\vert$	$\vert$
$\vert$	$\vert$	$\vert$
$\vert$	$\vert$	$\vert$

Esta sucesión debe contener a todos los reales de (0,!). Pero vamos a construir un real que no está en la sucesión:

0. a b c ………

Elegimos el dígito a de manera que difiera de a_1 y que no sea ni 0 ni 9 (para evitar ambigüedades como las que resultan de igualdades como 0,999 ……. = 1,000 …….) , luego un dígito b diferente de b_2 y también distinto de 0 y de 9, luego c diferente de c_3 , y así sucesivamente. Por ejemplo, elegimos simplemente a=1, salvo que fuera $a_1 = 1$, en cuyo caso elegiríamos a = 2, y análogamente para todos los dígitos b, c, …….. El número así construido es ciertamente diferente de cualquiera de los números de la sucesión anterior; no puede ser N_1 porque difiere de él en la primera cifra decimal; tampoco puede ser N_2 al diferir de él en la segunda cifra decimal, y así sucesivamente.
Hemos llegado pues a una contradicción y entonces el conjunto considerado no es numerable. Su potencia es diferente de a y la llamaremos **c**; diremos que el conjunto considerado tiene la “potencia del continuo”. Intuitivamente, sentimos que c > a , por la misma naturaleza de nuestra demostración; como ya lo mencionamos, esta conclusión puede establecerse con todo rigor pero en nuestra presentación nos conformarenos con esta aceptación intuitiva.
El proceso emplado para construir el número 0,abc…… se llama “método diagonal” y fue el empleado por el mismo Cantor.
Observemos que si agregamos al conjunto los extremos 0 y 1, los podemos incluir en el conjunto como 0,0000…… y 0,9999……..y la demostración no cambia (de acuerdo a las sólidas herramientas que se establecen en la teoría, tampoco cambia la potencia del conjunto, como se comprende intuitivamente).

Otros conjuntos de potencia c :
El conjunto de los puntos de una semirrecta es coordinable con el conjunto de los puntos de un segmento, pues basta hacer una proyección conveniente del segmento sobre la semirrecta desde un punto P, como lo muestra esta figura: :



Se establece así una correspondencia biunívoca entre los puntos del segmento y los de la semirrecta, de modo que el conjunto de los puntos de la semirrecta tiene también la potencia del continuo.
Se demuestra en la teoría de la Aritmética Transfinita que también la recta, el plano y el espacio son conjuntos de potencia c.

Conjuntos de potencia **f** :
Vamos a considerar ahora el conjunto de todas las funciones definidas en un intervalo [a,b] y vamos a llamar **f** a la potencia de ese conjunto (llamado también conjunto de Cantor). Demostraremos que su potencia es "mayor" que c (continuamos con nuestra noción intuitiva de desigualdad entre cardinales transfinitos).
Razonaremos por el absurdo. Supongamos que el conjunto de esas funciones es coordinable con el de los puntos de [a,b]:

$$f_a(x) \quad \rule{4cm}{0.4pt} \quad a$$
$$f_b(x) \quad \rule{4cm}{0.4pt} \quad b$$
$$f_\xi(x) \quad \rule{4cm}{0.4pt} \quad \xi\ ,$$

siendo ξ un punto genérico de (a,b).
Definimos una función $\varphi(x)$ en [a,b] del modo siguiente:

$$\varphi(a) = f_a(a) + 1$$
$$\varphi(b) = f_b(b) + 1$$

y en general, en un punto ξ cualquiera de (a,b):

$$\varphi(\xi) = f_\xi(\xi) + 1$$

Esta función $\varphi(x)$ difiere de $f_a(x)$ pues difiere de ella en el punto a; análogamente, difiere de f_b , y de todas las funciones. Por lo tanto, $\varphi(x)$ no pertenece al conjunto, lo cual es absurdo.

Por lo tanto el conjunto de las funciones definidas en [a,b] no es coordinable con el conjunto de los puntos de [a,b]: $f \neq c$ (por la naturaleza de nuestra demostración, otra vez nuestra intuición nos dice que $f > c$).
Notemos que el método empleado es nuevamente el método diagonal.

Observación importante :
Hemos visto que $a < c$, pero cabe preguntarse: **¿ Hay conjuntos de potencia mayor que la de N y menor que la de R?, es decir ¿hay algún conjunto de potencia p tal que $a < p < c$?** Esta pregunta constituye la formulación cardinal del **"problema del continuo"**, problema de suma importancia que ocupó a Cantor en toda la última parte de su vida, afirmando él que no existía tal p. Pero esa afirmación nunca fue más que una conjetura pues Cantor falleció sin poder resolver el problema. Cuando él elaboró los llamados "alefs de Cantor" que son los ordinales transfinitos nombrados en forma creciente:

$$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad ,$$

siendo $\aleph_0 = a$ el menor de los transfinitos, Cantor afirmó que $\aleph_1$ era c, o sea que no había ningún transfinito entre a y c, pero no pudo demostrarlo.
En épocas más recientes, la situación del problema ha sido objeto de una conclusión más precisa en el mundo de los matemáticos. En primer lugar, Gödel demostró que la hipótesis del continuo es lógicamente consistente son los otros axiomas de la teoría de conjuntos, o sea que aceptando los otros axiomas de esa teoría no había manera de demostrar que la hipótesis de continuo era falsa (lo cual hubiera seguramente alegrado mucho a Cantor). Pero completando esa conclusión, el matemático Paul COHEN de la Universidad de Stanford demostró en 1963 que tampoco había manera de demostrar que fuera verdadera., o sea que no era consecuencia de los demás axiomas. Estos resultados condujeron a que el mundo de los matemáticos considerara entonces que la hipótesis del continuo desempeña en la teoría de conjuntos un papel análogo al que en geometría tiene el postulado de Euclides sobre las paralelas: **¡¡ es posible construir diferentes versiones de la teoría de conjuntos según que la hipótesis del continuo se suponga verdadera o falsa, lo mismo que se pueden construir geometrías euclídeas o no-euclídeas según que se admita que el postulado de las paralelas se cumple o no !!**

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

GEOMETRÍA

Los lectores interesados podrán encontrar un gran número de problemas de Geometría en las obras siguientes, así como también interesantes exposiciones metodológicas y orientaciones en la resolución de esos problemas:

COXETER, H.S.M. : “Introduction to Geometry”, USA, Wiley, 1989.
COXETER, H.S.M.- GREITZER, S.L. : “Geometry revisited”, “The Mathematical Association of América”, 1967
DUBNOV, Ya. S. : “Errores en las demostraciones geométricas”, traducción del ruso, Limusa-Wiky, 1973.
PETERSEN, J.: “Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques”, traducción al francés del danés, Paris, Gauthier-Villars, 1946.
PUIG ADAM, P. : “Lecciones de Geometría Métrica”, Madrid, Dossat, 1952.

MATEMÁTICA GENERAL

Por su profundo enfoque filosófico sobre temas afines con el objetivo de este libro, recomendamos los siguientes títulos:

AIGNER,M.- ZIEGLER,G. : “Proofs from THE BOOK”, Springer, New York, 1999
CALLENDREAU, E. :”Célèbres problèmes mathématiques”, Albin Michel, Paris, 1949.
COURANT, R, y ROBBINS, H.: “What is Mathematics?”, Nueva York, Oxford University Press, 1948 Traducción al español : “¿Qué es la Matemática?”,Madrid, Aguilar; Editorial Alda, 1954.
DANTZIG, Tobias: “NUMBER – The language of science”, Macmillan, 1954.
DAVIS, P. J. y HERSH, R, : “The Mathematical Experience”, Birkhauser Boston, 1982 (traducción al español: “Experiencia Matemática”, Barcelona, Labor, 1988).
DE GUZMÁN, M. : “Para pensar mejor”, Ediciones Pirámide, Madrid, 1995
DIEUDONNÉ, J. : “Pour l´honneur de l`esprit humain”, Paris, Hachette, 1987.
GUILLEN, Michael : “Bridges to infinity”, Tarcher, Los Angeles, 1983
GUY, Richard K. : “Unsolved problems in number theory”, Springer, New York, 1991
HADAMARD, J. : “Psychology of invention in the mathematical field”, Princeton, University, 1994 (traducción al español: “Psicología de la invención en el campo matemático”, Espasa-Calpe, 1947).

LAUBENBACHER,R. and PENGELLEY,D.: “Mathematical expeditions”, New York, Springer, 1999
PAENZA, Adrián : “Matemática…¿ estás ahí?” (episodios 1, 2 y 3), Siglo veintiuno editores., 2005, 2006 y 2007.
PAPPAS, Theoni : “Mathematical Scandals”, Wide Word Publishing, 1997
RIBENBOIM, Paulo: “Números primos: mistérios e recordes”, Rio de Janeiro, Coleção Matemática Universitária, 2001
POLYA, G. :”How to solve it”, Princeton University Press, 1945
(traducción al francés: “Comment poser et résoudre un problème”, Paris, Dunod, 1957).
POLYA, G. :”Mathematics and Plausible Reasoning”, 2 volúmenes, Princeton University Press, 1954.
POLYA, G. :”Mathematical Discovery”, 2 volúmenes, Nueva York, John Wiley and Sons, 1962
POLYA, G. : “Induction and Analogy in Mathematics”, Princeton, 1954

HISTORIA DE LA MATEMÁTICA

Para el lector interesado en la historia y la obra de los grandes genios matemáticos que nos legaron los maravillosos frutos de su pensamiento, recomendamos los siguientes libros:

AUTORES VARIOS ; “Grandes matemáticos”, Colección Investigación Ciencia, Prensa Científica S.A., Barcelona, 1995.
BELL, E.T. : “Les grands mathématiciens”, Payot, Paris, 1964.
DUNHAM, W. : “Viaje a través de los genios”, Ediciones Pirámide, Madrid, 1993.
GUILLEN, Michael: “Five equations that changed the world”, Hyperion, New York, 1995
HARDY,G.H. : “A mathematician´s apology”, Canto, Cambridge, 1999
HOFFMAN, P. : “The man who loved only numbers” (the story of Paul
Herdös and the search of mathematical truth), Hyperion, New York, 1998
MORITZ, R.E. : “On Mathematics and mathematicians”, Dover, New York, 1958.
PAPPAS, Theoni : “Mathematical Scandals”, Wide Word Publishing, 1997
SINGH, S. : “El último teorema de Fermat”, Norma, Bogotá, 1999.

AGRADECIMIENTOS

No puedo dejar de manifestar mi agradecimiento hacia las siguientes personas, que han sido muy generosas al brindarme su valiosa ayuda en la producción de mi libro:

- Dr. Ing. Jorge GRUNBERG, Rector de la Universidad ORT-Uruguay e Ing. Mario FERNÁNDEZ, Decano de la Facultad de Ingeniería de ORT-Uruguay, por su invalorable apoyo en la edición de este libro.

- Ing. Álvaro FERNÁNDEZ, Catedrático Adjunto de Matemáticas en la Facultad de Ingeniería de ORT-Uruguay, por haberme introducido en la temática del Cálculo Finito.

- Lic. Eduardo CUITIÑO, docente de Matemáticas en la Facultad de Ingeniería de ORT Uruguay, por haberme informado acerca de la existencia y la historia académica del eminente matemático de nuestros días Terence TAO.

- MBA Bernardo CAMOU, profesor de Matemáticas y amante de la Geometría, por haberme prestado su valiosa colaboración en la reflexión acerca de problemas geométricos.

- Dr. Ing. Mario VIGNOLO, Jefe del Departamento de Potencia del Instituto de Ingeniería Eléctrica de la Facultad de Ingeniería, UDELAR, por haberme ayudado en aspectos informáticos muy útiles para la edición de este libro.

- Sra. Sandra LEAL, de la Oficina de Publicaciones de ORT, por su competencia profesional y sobre todo por la gran calidad humana que demostró en todo momento para lograr una culminación feliz de la publicación de mi libro, sorteando con gran eficiencia y notable buena voluntad los inevitables pequeños escollos que surgían durante los trabajos de edición.

A fines del año 2007, al retirarse de su cargo de catedrático de Matemáticas de la Facultad de Ingeniería de la Universidad ORT, el autor de este libro recibió una carta del Rector, Dr. Jorge Grünberg, que se transcribe a continuación:

Montevideo, 24 de diciembre de 2007

Estimado Prof. Haim:

Con motivo de acogerse Ud. a los beneficios jubilatorios, le hago llegar mis más sinceras felicitaciones que van unidas naturalmente a un sentimiento de tristeza.

Su labor a lo largo de tantos años ha significado un importantísimo
aporte para nuestra universidad; sus conocimientos y condiciones docentes, su generosidad con alumnos y colegas y su preocupación por el genuino aprendizaje, han constituido elementos básicos en la construcción de la Facultad de Ingeniería y por lo tanto de toda nuestra institución.

No puedo dejar de agregar, como nota personal, el afecto y la admiración que siento hacia Ud. desde los lejanos días en que fue mi profesor en el recordado Liceo Francés.

Querido Profesor, sé que ahora comienza para Ud. una nueva etapa de descanso pero también de nuevos trabajos y logros.
Afectuosamente.

Dr. Ing. Jorge Grünberg
Rector

años en Uruguay ORT

ORT
Educando para la vida
www.ort.edu.uy

Setiembre 2008